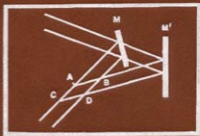


Л. ДЕ БРОЙЛЬ

СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ГЕЙЗЕНБЕРГА

И ВЕРОЯТНОСТНАЯ
ИНТЕРПРЕТАЦИЯ
ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКИ



**LES INCERTITUDES D'HEISENBERG
ET L'INTERPRÉTATION PROBABILISTE
DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE**

Avec des notes critiques de l'auteur

par LOUIS DE BROGLIE

Secrétaire Perpétuel d'honneur

de l'Académie

des Sciences

Prix Nobel

Préface et notes complémentaires

de Georges Lochak

1986

Л. ДЕ БРОЙЛЬ

Непременный почетный секретарь Академии
наук Франции, лауреат Нобелевской премии

СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ГЕЙЗЕНБЕРГА

И ВЕРОЯТНОСТНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКИ

(С критическими замечаниями автора)

**Предисловие
и дополняющие замечания Ж. ЛОШАКА**

Перевод с французского
канд. физ.-мат. наук Н. В. САМСОНЕНКО
под редакцией
д-ра физ.-мат. наук Г. З. ЗАЙЦЕВА



МОСКВА «МИР» 1986

ББК 22.314
Б88
УДК 530.145/539.1

Бройль де Л.

Б88 Соотношения неопределенностей Гейзенберга и вероятностная интерпретация волновой механики. (С критическими замечаниями автора.) Предисл. и дополняющие замечания Ж. Лошака. Пер. с франц. — М.: Мир, 1986. — 344 с., ил.

Книга представляет собой обработку курса лекций известного французского ученого, иностранного члена АН СССР Л. де Бройля по квантовой механике, прочитанных им в 1951—1952 гг. Автор в оригинальной и доступной форме излагает основные понятия квантовой теории, одним из создателей которой он сам является. В примечаниях по ходу изложения принятой «копенгагенской» интерпретации квантовой механики автор приводит свои интересные и малоизвестные у нас идеи относительно интерпретации квантовой механики и возможных путей ее дальнейшего развития.

Рассчитана на широкий круг читателей — физиков, философов и других научных работников.

Б $\frac{1704020000-001}{041(01)-86}$ 49—86, ч. 1

ББК 22.314

Редакция литературы по физике

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Вместе с Альбертом Эйнштейном, Полем Дираком и Нильсом Бором Луи де Бройля можно отнести к числу четырех крупнейших физиков XX в., оказавших решающее влияние на физическое мировоззрение нашей эпохи. Формирование современных физических представлений осуществлялось в процессе обмена идеями между различными, нередко заметно разнящимися и даже противоположными научными направлениями, и каждый из названных выше ученых фактически стал идейным лидером одного из таких направлений. Так, с именем Эйнштейна связано, с одной стороны, чисто полевое, а с другой — детерминистское направление в физике XX в. Своеобразным антиподом по отношению к Эйнштейну является Бор — идейный лидер копенгагенской школы. В какой-то степени независимую позицию по отношению к двум указанным научным направлениям занял третий крупнейший физик Дирак, проложивший пути математической разработке ряда новых квантовомеханических идей. Наконец, идейным лидером четвертого направления в квантовой механике явился де Бройль, занявший совершенно независимую позицию. В отношении детерминизма де Бройль близок к Эйнштейну, однако он полностью оригинален во взглядах на природу волновых свойств квантовомеханических частиц. Исходная позиция де Бройля (в дальнейшем претерпевшая различные модификации) заключалась в том, что частицы в какой-то степени носят первичный характер (в этом пункте де Бройль расходится с Эйнштейном), но с их движением связано распространение волн.

Научный и исторический опыт показывает, что быстрое развитие физики по неизведанным путям оказывается возможным лишь в том случае, если оно связано с существованием в некоторых отношениях противоположных направлений, которые взаимно дополняют друг друга. Хотя направление де Бройля представлялось несколько оторванным от большинства других работ, публиковавшихся в физических журналах, оно играло и играет стимулирующую роль, способствуя выработке альтернативных взглядов и более всестороннему анализу физических явлений. В частности, предложенные де Бройлем нелинейная модификация волновых уравнений и использование солитоноподобных решений могут представлять интерес с точки зрения важнейшей для современной физики проблемы объединения различных взаимодействий в рамках теории единого поля.

Как известно, квантовая механика — неотъемлемое звено мировой науки и одно из великих достижений человеческого гения — не только служит базой для описания и предсказания атомных и молекулярных явлений, но и является опорой вероятностного подхода к физическим теориям. После Сольвеевского конгресса по основаниям квантовой механики ее вероятностное истолкование устояло против критических возражений и в конечном итоге стало общепринятым. Присоединился к нему и де Бройль — один из основателей квантовой (по терминологии де Бройля и Шредингера, волновой) механики. В своих лекциях и более чем в десяти монографиях и учебниках по квантовой механике, опубликованных до 1953 — 1959 г., он систематически излагал и развивал результаты, связанные с общепринятым подходом к квантовой (или волновой) механике. Одновременно с этим Луи де Бройль с 1950 г. работал над монографией по основаниям квантовой механики, рассматриваемой в рамках копенгагенской интерпретации. В связи с этим у него, как и у Эйнштейна, возникла дилемма: нужно ли при создании следующих за квантовой механикой физических теорий считать первичными вероятностные представления или же вероятностная интерпретация должна выводиться из детерминистской теории аналогично тому, как вероятностная интерпретация в классической статистической механике выводилась Больцманом из абстрактной схемы детерминистской классической механики? Другими словами, из чего следует исходить при построении физических теорий более глубокого уровня, из первичности вероятностных или детерминистских понятий?

Развитие квантовой механики привело к тому, что на современном этапе более первичными представляются именно вероятностные, или статистические, теории, и, например, не статистическая классическая механика должна выводиться из детерминистской теории, а наоборот — скорее последняя должна рассматриваться как предельный случай статистической, соответствующий стремлению функции распределения в фазовом пространстве к δ -функции Дирака. Размышляя над этими вопросами, де Бройль пришел к тому, что свою монографию дальше стал писать уже не для широкой публики, а для себя, включая в нее свои незавершенные идеи, надежды и сомнения. В последующие годы на базе этих идей он подготовил целую серию работ (см. полный перечень работ Луи де Бройля в конце данной монографии), связанных, по словам самого автора, со вторым в его жизни интенсивным многолетним подъемом творческой активности. В частности, обратим внимание на предложенную им общую идею скрытой термодинамики частиц, основанную на соотношении де Бройля между энтропией субквантовой среды и действием. По смелости и оригинальности эта идея сравнима с идеей ученого о наличии у всех частиц волновых свойств. И хотя новые идеи Луи де Бройля не получили (по крайней мере в их первоначальном обличьи) общего признания, для нас сейчас представляет большую ценность анализ критических взглядов на квантовую механику, принадлежащих одному из ее создателей. Что же касается самого вопроса о неполноте квантовомеханического описания, то он по-прежнему привлекает большое внимание и является в настоящее время предметом непосредственной экспериментальной проверки. С современным состоянием проблемы читатель может ознакомиться, например, в обзоре

А. А. Гриба «Неравенства Белла и экспериментальная проверка квантовых корреляций на макроскопических расстояниях» (УФН, 1984, т. 142, с. 619).

Предлагаемая читателю книга представляет собой перевод указанной выше монографии, обработанной и дополненной замечаниями самого Луи де Бройля, сделанными им в последующие годы и учитывающими более поздние результаты. Обработка проведена ближайшим сотрудником Луи де Бройля Жоржем Лошаком. Основному тексту книги (выпущенной во Франции в канун 90-летия Луи де Бройля) предшествует большое предисловие Лошака, дающее историческую оценку рассматриваемых в ней вопросов. Далее идут первая (1950 — 1951) и вторая (1951 — 1952) части книги, переработанные Лошаком с учетом замечаний де Бройля и снабженные многочисленными примечаниями.

Книга может представлять интерес для широкого круга читателей. Затрагиваемые в ней проблемы носят долговременный характер и будут привлекать внимание физиков и философов в течение многих десятилетий.

Г. А. Зайцев

ВМЕСТО ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА

НЕОБХОДИМОСТЬ СВОБОДЫ НАУЧНОГО ТВОРЧЕСТВА¹⁾

История науки показывает, что наиболее значительный ее прогресс достигался усилиями тех дерзких мыслителей, которые открывали новые и плодотворные пути, не замеченные другими. Если бы идеи гениальных ученых, заложивших фундамент современной науки, были представлены на суд комиссиям специалистов, они, без сомнения, показались бы экстравагантными и их отвергли бы именно за их оригинальность и глубину. В подтверждение этого достаточно сослаться на борьбу, выдержанную, к примеру, Френелем или Пастером. Некоторые из таких первооткрывателей сталкивались с непониманием со стороны выдающихся ученых и вынуждены были много сил отдавать борьбе, прежде чем добивались успеха. В более близкие нам времена в области теоретической физики, о которой я могу говорить со знанием дела, на непонимание со стороны крупнейших ученых натолкнулись превосходные новые идеи Лоренца, Планка и особенно Эйнштейна. В конце концов эти идеи восторжествовали, но, по мере того как организация научных исследований становится все более жесткой, все больше опасность, что новые и плодотворные идеи уже не смогут развиваться свободно.

Подведем краткий итог сказанному. В силу того что по самой логике своего развития система научных исследований и научного образования непрерывно отягощается громоздкими административными структурами, заботами финансирования и тяжеловесным механизмом регламентаций и планирования, становится более чем когда-либо необходимым охранять свободу научного творчества и свободную инициативу оригинальных исследований, поскольку эти факторы всегда были и останутся самыми плодотворными источниками великого прогресса Науки.

25 апреля 1978 г.

Луи де Бройль

¹⁾ Заметка, написанная де Бройлем для журнала "Annales de la Fondation Louis de Broglie" к 100-летию со дня рождения А. Эйнштейна.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ФРАНЦУЗСКОГО ИЗДАНИЯ

ЭВОЛЮЦИЯ ИДЕЙ ЛУИ ДЕ БРОЙЛЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ИНТЕРПРЕТАЦИИ ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКИ

Ж. ЛОШАК

Книга, с которой познакомится читатель, занимает особое место не только в творчестве Луи де Бройля, но и во всей научной литературе. Она позволяет проследить ход мыслей великого ученого, который неожиданно пересматривает основы своих научных взглядов и еще раз спрашивает себя об истинном содержании теории, одним из создателей которой он сам является.

Рукопись этой книги датирована 1950 — 1951 гг., но лишь спустя 30 лет Луи де Бройль решил на ее опубликование. Дело в том, что интерес к рукописи у него пропал сразу же после ее написания. Это была последняя работа, в которой он особенно ярко и убедительно излагал без всякой критики волновую механику в духе идей копенгагенской школы. Такой интерпретации он давно придерживался, однако, перечитывая собственный текст, он стал в ней всерьез сомневаться. Его сомнения проявляются во множестве замечаний, вклеенных им между страницами рукописи, которые здесь воспроизводятся, а также в исправлениях и небольших, но существенных добавлениях, которые тоже помещены в этой книге.

Подобный диалог между автором книги и тем человеком, каким он сам был всего лишь несколько месяцев назад, вызывает у читателя волнующее чувство соприкосновения с внутренним миром его размышлений, тем более, что сейчас все освещается известной нам последующей эволюцией его мировоззрения. В самом деле, в результате крутой перемены своих научных взглядов, неожиданной для всех, но в действительности явившейся результатом долгих размышлений, о чем пойдет речь далее, Луи де Бройлю суждено было стать суровым критиком той самой копенгагенской школы, взглядов которой он долгое время придерживался. В результате такого критического переосмысления он с юношеским энтузиазмом снова принимается за разработку своей теории двойного решения, когда-то им оставленной, на которую он снова возлагает все свои надежды. Было ли это ошибкой или проявлением здравого смысла, до сих пор остается спорным, и, вероятно, только будущее сможет ответить на этот вопрос.

Хотя теория, предложенная Луи де Бройлем, еще находится в незавершенном состоянии, я думаю, все же можно утверждать, что время подтвердило правоту тех, кто, как и де Бройль, снова обратились к давней проблеме интерпретации квантовой теории.

Многое изменилось за 30 лет, но в те времена внезапный поворот во взглядах одного из наиболее известных физиков нашего столетия был сенсационным и в некоторой степени даже скандальным. В кулуарах Института Анри Пуанкаре о нем говорили вполголоса, как если бы у де Бройля вдруг обнаружилась серьезная болезнь и от него было бы благоразумно держаться в стороне.

Это, однако, не мешало тому, что многочисленная аудитория молчаливых почитателей толпилась на его лекциях и семинарах, на которые он приходил, как обычно, величественный и любезный, делая вид, что ничего этого не замечает. Не то ли же самое происходило в Принстоне, где Эйнштейн, этот упрямый противник доминирующего направления в физике, своим отвлеченным и добродушным видом рассеивавший созданный вокруг него ореол благоговения, писал Макс Борну [1]: «Меня здесь считают чем-то вроде ископаемого, которого годы сделали слепым и глухим».

Дебаты разрослись до масштаба религиозных войн и приняли мировой размах. В полемику вступили сами основатели квантовой физики, поддерживаемые их горячими почитателями. В это же время на передний план выдвинулись молодые и яркие «новички», такие как Дэвид Бом, появившийся на авансцене благодаря своей заслуге быть первооткрывателем всей этой дискуссии.

Впоследствии дебаты уже больше не затихали. Стало обычным делом критически осмысливать основания квантовой механики, красивое и молчаливое согласие по поводу которых было взорвано, что можно лишь приветствовать, ибо полное единодушие в науке достигается только в ущерб творчеству и приводит к схоластике и идейному тупику.

В настоящее время идеи Луи де Бройля, далеко не всеми разделяемые, многим все еще не известны и часто подвергаются критике тех, кто с ними знаком (а еще больше критике тех, кто не знаком, как обычно и бывает), и ученики де Бройля, как и он сам, признают, что эти идеи пока не составляют единого целого, которое можно было бы рассматривать как окончательную теорию. Однако эти идеи начинают давать всходы то там, то здесь, особенно за пределами Франции.

В качестве примера можно привести новейшие исследования по нелинейным волновым уравнениям и *солитонам*. Лишь отдельные авторы указывают на то, что де Бройль и его ученики были неоспоримыми инициаторами этого направления в микрофизике. То же можно сказать и о таких идеях, как доминирующая роль измерения координаты по отношению к измерению других физических величин и более важное значение спектрального анализатора, нежели измерительного прибора в собственном смысле слова. Эти идеи в течение долгого времени развивались де Бройлем, и интерес к ним сейчас снова возродился.

После того как была написана рукопись, которую мы публикуем только сегодня, Луи де Бройль развивал свои критические концепции и защищал свои новые идеи в 12 книгах и более чем в 60 научных статьях. Но я уверен, что эта книга займет среди них особое место, так как она отражает переломный момент в его творчестве, а также потому, что это книга вопросов.

Дело в том, что в работах, опубликованных после написания этой книги, всюду одновременно обнаруживаются две стороны: критика трудностей в существующих теориях и предлагаемые пути их преодоления. Поэтому в сознании читателя, расположенного выслушать критику или по меньшей мере поставленный вопрос, но не склонного согласиться с теорией, выдвигаемой де Бройлем, предлагаемое решение может затушевывать сущность проблемы. В этой же книге, напротив, позиция ученого совсем иная. В основном ее тексте он защищает идеи копенгагенской школы, а в своих примечаниях лишь спрашивает себя об их сути, что ставит его на один уровень с читателем, который тоже задает себе вопросы. Тем не менее эти примечания, «бумажки», как сказал бы Пруст, вложенные в рукопись, уже содержат в краткой форме, временами с нотками сомнения, с недомолвками (так что иной раз приходилось их расшифровывать для читателя) почти все идеи, ставшие в течение последующей четверти века базой исследований, к которым он собирался приступить в возрасте 60 лет.

Примет ли читатель или отвергнет предлагаемые идеи, важно, чтобы он подходил к ним без предубеждения, стараясь распознать дыхание гения, от кого бы оно ни исходило: от де Бройля, Гейзенберга, Бора или Эйнштейна. Увы, их великая эпоха прошла, и создатели квантовой физики сегодня либо уже в могиле, либо достигли преклонного возраста. Они вошли в историю науки и унесли с собой страсть и соперничество великих ее творцов. Конечно же, соперничество продолжается и в наши дни. Оно присутствует всегда, так как наука вовсе не холодильный шкаф для хранения установленных истин, а арена, на которой идет борьба между людьми и их пламенными идеями. Но по крайней мере будем спорить между собой и не станем больше спорить с ними. Мы можем восхищаться их величием, не портя ненужными идейными шорами интеллектуальное и эстетическое наслаждение, доставляемое их учением. Нас поражает в этой книге тонкий анализ, проделанный Бором или Гейзенбергом, в не меньшей степени, нежели аналитический ум самого де Бройля. Мы восхищаемся не только научной гениальностью этого шестидесятилетнего ученого, но еще и тем, что он нашел достаточно духовных сил, любви к риску, презрения к молве и принял в конце карьеры за новый труд, поставив на карту доброе имя ради идеи, в которую никто не хотел верить. И может быть, нам позволительно немного позавидовать его судьбе, судьбе человека, прожившего достаточно долго, чтобы на закате своих дней, закончив новую работу в возрасте 80 лет, сказать: «Я часто спрашиваю себя в эти последние годы, не было ли время после 70 лет с точки зрения интеллектуального бытия самым прекрасным в моей жизни» [III, 9].

Чтобы оценить по достоинству эту книгу и поворот в научных взглядах, который она знаменует, необходимо знать ее место на научном пути автора, который поставил непременным условием публикации своей рукописи помещение данного предисловия. Думаю, что было бы небезынтересно начать с рассказа о предыстории самой этой публикации.

Несколько лет назад Луи де Бройль принял решение доверить мне использовать наилучшим образом его научные работы и передал мне часть из них.

В большинстве своем это были отдельные листочки бумаги маленького

формата, хорошо знакомые всем его ученикам, на которых он имел обыкновенные писать ручкой Sergent Major черными чернилами своего рода научные поэмы, каждая из которых была посвящена четкому и ясному изложению какого-либо вопроса, занимавшему один листочек, обе стороны которого были исписаны его элегантным и строгим почерком, без полей, без помарок, где все было бы самой размеренностью, если бы некоторые графические детали не выдавали сильный характер, хотя и всегда сдерживаемый.

Эти бумаги были разложены по нескольким конвертам, и на каждом из них рукой де Бройля было написано, какое значение он им придает.

Кроме этих конвертов, он вручил мне несколько тетрадей, составлявших содержание того, что его молодые сотрудники называли «лекциями по четвергам». Дело в том, что в последние годы своей университетской деятельности он еженедельно читал в Институте Анри Пуанкаре два курса, совершенно разных по своему характеру¹⁾. По понедельникам он читал для студентов классический курс физики, который без существенных изменений повторял из года в год и который служил основой изучения теоретической физики для будущих ассистентов и доцентов. В противоположность этому по утрам в четверг для научных сотрудников им читался курс, содержание которого ежегодно обновлялось и в ходе которого преподносилось оригинальное изложение актуальных научных проблем, что скорее соответствовало традициям не Университета, а Коллеж де Франс²⁾.

Именно эти курсы послужили основой большинства книг Луи де Бройля, но некоторые из них так и не были опубликованы. Точно так же обстояло дело с работами, которые он мне доверил. Де Бройль специально обратил мое внимание на две тетради, отличавшиеся от остальных своими красивыми картонными обложками, покрытыми глянцево-бежевой тканью; но лишь затем, к сожалению, чтобы я не спешил с их опубликованием. Он даже написал на первой странице каждой из них решительным почерком «Не публиковать», причем обвел эти слова двойной рамкой. Он вкратце пояснил мне свои мотивы, посоветовал прочитать рукопись и, подчеркивая свое расположение ко мне, добавил: «Для таких, как Вы, это может оказаться очень интересным». Но когда я на следующий день читал текст, то испытывал чувство, которое не ограничивалось только научным интересом — я внутренним чутьем предугадывал продолжение каждого листочка, с полуслова понимал смысл малейших карандашных пометок, сделанных после небольших подтирок, и более значительные поправки того, кого я знал, как родного отца. Я сразу же пришел к убеждению, что если он и в самом деле не позволит мне опубликовать эту книгу, то вскоре этим займется кто-либо другой и постарается склонить

¹⁾ Это различие между двумя курсами стало отчетливо проявляться, начиная только с 1954 г. До этого времени они оба носили один и тот же характер и возобновлялись без изменений ежегодно.

²⁾ Коллеж де Франс — одно из старейших научно-исследовательских и высших учебных учреждений Франции, отличающееся высоким уровнем преподавания и научно-исследовательской работы. — *Прим. перев.*

де Бройля к этому, убедив, что его собственный текст в какой-то степени ему больше уже не принадлежит, а принадлежит истории науки и в той или иной форме заслуживает опубликования. Вместе с тем я отдавал себе отчет, что в научных кругах слишком привыкли воспринимать рафинированную науку, облаченную во все доспехи и провозглашаемую в качестве истины в последней инстанции, тем более, что способ изложения современных теорий, аксиоматизированных, синтезированных и формализованных, приводит к ложному представлению о том, что в отличие от художников ученые в какой-то мере способны выдавать законченные и отшлифованные результаты, заверенные печатью, подтверждающей возможность их вечного использования. В противовес этому у нас была возможность показать читателю науку в развитии, когда она предстает перед его глазами в процессе формирования и болезненного становления, как это и имеет место в действительности. Но ведь в мире искусства все с большим чувством оценивают макеты скульптур и наброски картин, в которых проявляется не только прелесть будущего произведения, но и обнаруживаются особенности манеры письма художника, отбрасывающего одни проекты и заменяющего их другими. Почему же тогда в таком случае игнорируются эскизы физиков?

Вначале у меня ничего не получалось, поскольку Луи де Бройль не был человеком, легко меняющим свои взгляды. Но я незаметно возобновил атаки в последующие месяцы, и однажды с его согласия принес обе тетрадки. Мы просмотрели их вместе, после чего с напускной торжественностью стерли карандашную надпись «не публиковать», и я ушел с разрешением издать рукопись *без изменений* при условии, что сделаю некоторое количество дополнительных примечаний и помещу вводный текст, который характеризовал бы место данной работы в его научном наследии.

Что прежде всего требовало объяснений, так это повторное обращение с промежутком в 25 лет к идеям, от которых Луи де Бройль в свое время отказался. Чтобы понять это, необходимо сначала уточнить ту роль, которую он играет среди создателей квантовой физики.

Мне представляется, что после Эйнштейна он был первым теоретиком, который поверил в существование квантов света (фотонов), а также единственным, который поверил не только в *дуализм*, но, по его собственному выражению, в *существование волн и частиц*.

Известно, что гипотеза квантов света натолкнулась на очень большие трудности и что на нее долгое время смотрели как на своеобразную ошибку молодости Эйнштейна, которую ему прощали лишь из-за его больших заслуг в других областях¹⁾. Даже экспериментальное подтверждение Милликеном законов фотоэффекта никого не убедило, в том числе и самого Милликена, и отношение к этому вопросу изменилось лишь в 1922 г. после экспериментально-

¹⁾ У самого Эйнштейна есть свидетельства подобного всеобщего неверия. Например, в письме к Бессо от 29 июля 1918 г. он писал: «... я больше не сомневаюсь в *реальности* квантов излучения, хотя по-прежнему в этом убеждении пребываю лишь я один».

го открытия эффекта Комптона. В то же самое время де Бройль уже долгое время работал над теорией квантов света и в статье, озаглавленной «Излучение абсолютно черного тела и кванты света . . . » [I, 12], вывел все термодинамические закономерности излучения абсолютно черного тела, не прибегая к электромагнитной теории и используя лишь статистическую механику и теорию относительности. В частности, *без использования теории электромагнитных волн* он нашел выражение для закона Стефана — Больцмана и (за 2 года до Бозе!) получил знаменитый множитель $8\pi h/c^3$, который входит в выражение для плотности энергии излучения. В этой же статье он впервые выдвинул гипотезу, согласно которой фотон имеет ненулевую массу покоя и, следовательно, его скорость в пустоте зависит от частоты колебаний, так что скорость c есть своего рода предельная скорость, определяемая по теории относительности, но недостижимая не только для частиц вещества, но и для света.

В этой статье он попытался как можно убедительнее и полнее использовать корпускулярный характер света. В то же самое время в работе «Об интерференции и квантовой теории света» [I, 13; III, 9] Луи де Бройль был озабочен тем, чтобы согласовать корпускулярные и волновые свойства. Здесь он сформулировал идею «существования совокупностей атомов света, движущихся не независимо, а когерентно». Он предсказал, что «уравнения Максвелла, несомненно, окажутся непрерывным приближением (справедливым во многих, но не во всех случаях) к дискретной структуре энергии излучения».

С уверенностью можно сказать, что такого рода образ мышления доминирует во всех работах де Бройля и что именно благодаря этому он открыл волновую механику. Последнее стало возможным, во-первых, благодаря его глубокому убеждению в двойственной корпускулярно-волновой природе света и, во-вторых, благодаря тому, что корпускулярные свойства он рассматривал не как «кажущиеся», а как «истинное» проявление частиц, во всех отношениях аналогичных другим материальным частицам, имеющим собственную массу покоя и подчиняющимся законам релятивистской механики. В качестве пояснения этого приведем одну деталь. Де Бройль часто употреблял (причем, я думаю, делал это только он один) слова *атомы* света вместо *кванты* света и, имея в виду их когерентные совокупности в световых волнах, говорил, что эти атомы должны группироваться в молекулы.

Считая, что свет всегда в равной степени состоит одновременно из частиц и волн, он приступил к изучению возможной связи между ними и установлению зависимости между их движениями. Именно из этого вопроса возникла волновая механика, поскольку, анализируя его, он ввел понятие частоты *внутренних колебаний* частицы, которая в собственной системе отсчета определяется равенством $m_0c^2 = h\nu_0$. Но эта формула, имеющая столь простой вид, приводит к очень серьезной трудности, поскольку для движущегося наблюдателя масса возрастает, тогда как из-за запаздывания часов внутренняя частота будет казаться меньше, ибо написанное равенство не является релятивистски инвариантным. Но оно становится релятивистски инвариантным, как обнаружил де Бройль, и оказывается возможным написать *квантовое соотношение*

$mc^2 = h\nu$ в любой галилеевой системе отсчета, если в собственной системе отсчета частицы сопоставить ей стационарную *волну* с частотой ν_0 , равной частоте внутренних колебаний, так как тогда частота этой волны при переходе к другой системе отсчета преобразуется, как масса.

В то же время Луи де Бройль вывел формулу $Vv = c^2$, связывающую фазовую скорость волны со скоростью частицы, что позволило ему сформулировать *теорему о согласованности фаз*, явившуюся для него ключом корпускулярно-волнового дуализма: «частица движется со своей волной таким образом, что внутренние колебания частицы всегда совпадают по фазе с колебаниями волны в точке, где она находится».

В самом деле, поскольку «атомы света» он рассматривал как настоящие частицы, его рассуждения носили более широкий характер (на что специально указывалось) и должны были быть справедливы для *любого движущегося тела*, в частности для электрона, которому теперь следовало сопоставить волну. Именно поэтому в 1923 г. де Бройль смог высказать утверждение, что «любое движущееся тело в определенных случаях может дифрагировать. Поток электронов, проходящий через достаточно малое отверстие, должен обнаруживать явления дифракции» [I, 17; III, 9].

И он тотчас же сформулировал идею, которая лежит в основе его понимания физического мира:

«Таким образом, мы считаем, что фазовая волна управляет передачей энергии и именно это позволяет осуществить синтез волновых колебаний и квантов. Волновая теория заходила слишком далеко, отрицая дискретность распределения энергии в пространстве, но чересчур ограничивала себя, отказываясь вмешиваться в динамику.»

Вскоре после того как в 1924 г. он написал свою знаменитую докторскую диссертацию, Луи де Бройль уточнил свои соображения в заметке [I, 24], которая появилась за неделю до защиты и где впервые были сформулированы понятия *сингулярности*. Там, в частности, говорилось:

«Это свойство (речь идет о теореме, относящейся к групповой скорости), являющееся прямым следствием уравнений Гамильтона, позволяет рассматривать материальную точку как сингулярность в группе волн, движение которой описывается принципом Гамильтона — Ферма». Эта фраза предвосхитила предложенный позднее принцип, названный *законом пилотирования* частицы волной. И он заканчивает свою заметку такой программной фразой:

«Но любая теория станет по-настоящему понятной лишь в том случае, если удастся определить структуру световой волны и характер сингулярности, образованной квантом, движение которого должно быть *предсказуемым* при *чисто* волновом описании».

Чуть позднее, 16 февраля 1925 г., де Бройль предпринял первую попытку осуществления своей программы в заметке, озаглавленной «О собственной частоте электрона» [I, 25], где он показал, что если фазовая волна

$$\varphi(x, y, z, t) \exp \left[2i\pi\nu \left(t - \frac{z}{V} \right) \right]$$

удовлетворяет уравнению Даламбера, то ее амплитуда φ подчиняется уравнению

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\nu_0^2}{c^2} \varphi \quad \left(\nu_0^2 = \frac{m_0 c^2}{4} \right).$$

Несмотря на внешнее сходство, написанное уравнение не является уравнением Клейна — Гордона, поскольку знак в правой части другой и это не результат ошибки в вычислениях. Тем не менее де Бройль был совсем близок к открытию волнового уравнения. Именно поэтому сразу же после появления работ Шредингера он исправил свою заметку 1925 г. и был одним из первых, кто вывел скалярное релятивистское уравнение для электрона. Здесь же, применяя свои идеи к пакетам волн, он нашел первые сингулярные решения [I, 29]. В необходимости существования таких решений он был уверен давно, и, на его взгляд, лишь они могли описывать сосуществование волн и частиц.

Вскоре после этого, исходя из своего принципа согласованности фаз, Луи де Бройль высказал предположение о существовании связи между его сингулярными волнами и непрерывными волнами Шредингера и в большой работе 1927 г. [I, 34] развил *теорию двойного решения*.

В противоположность работам Маделунг, появившимся к тому времени, это не было простой интерпретацией уравнения Шредингера. Здесь получила свое дальнейшее развитие та же самая основная идея, которой он руководствовался с самого начала в своих научных исследованиях и которая уже привела к открытию волновых свойств материальных частиц.

И тем не менее спустя лишь несколько месяцев Луи де Бройль отказался от дальнейшей разработки всех этих идей. Возникает вопрос — почему? В статье «Воспоминания о первых шагах волновой механики» [III, 4] Луи де Бройль сам в эмоциональной форме отвечает на этот вопрос. Хотя отдельные утверждения этой своей работы он впоследствии считал неверными и вернулся к идеям своей молодости, эта работа показывает, на каких соображениях в то время основывались его взгляды.

Эти побудительные мотивы можно резюмировать одной фразой. Он вдруг почувствовал себя в тупике, тогда как развивающаяся физика на его глазах одерживала все новые и новые победы. Он тут же обнаружил причину, по которой он, несмотря на свой блестящий успех вначале, оказался среди отставших. Дело было в том, что его представления отличались от взглядов большинства теоретиков.

Для Луи де Бройля характерно интуитивное мышление посредством простых конкретных и реалистических образов, присущих трехмерному физическому пространству. Для него не имеют онтологической ценности математические модели, в частности геометрические представления в абстрактных пространствах; он рассматривает их и использует лишь как удобные математические инструменты, и совсем не они лежат в основе его физической интуиции. Опираясь такими абстрактными понятиями, он всегда помнит, что в действительности явления протекают в физическом пространстве, а потому математика

тические рассуждения имеют для него значение лишь тогда, когда он в любой момент чувствует их связь с физическими законами в обычном пространстве.

Но на его глазах рождался совершенно новый подход к теоретической физике, который уже начал приносить свои плоды. Он основывался на использовании в физике весьма абстрактных понятий, на описании законов природы не с помощью пространственно-временных образов, а на основе алгебраических понятий или геометрических построений в абстрактных, чаще всего комплексных, пространствах с большим числом измерений. Абстрактный подход помогает развить у теоретиков новый вид физической интуиции, если можно так выразиться, интуиции второго порядка, которая все менее и менее непосредственно опирается на физические факты, а выражается в форме математических аналогий, алгебраических правил и законов симметрии и групп преобразований. Теоретики стали ставить своей целью не описание явлений, а предсказание. Их предположки и рассуждения носят чисто математический характер, и становятся очень трудным, если не сказать невозможным, обнаружить за ними какие-либо физические образы, хотя формулы, к которым они приходят, зачастую чудесным образом подтверждаются на опыте. Произошел далекий отход от теоретической физики Френеля и Лоренца. Замечательно, что и Эйнштейн, который славился своей утонченной физической интуицией и близостью к эксперименту, в то же самое время был одним из главных инициаторов этого нового подхода, что проявилось как в его работах по теории относительности, так и в его работе 1917 г. о квантах [2], которая оказала очень большое влияние на де Бройля и Шредингера и где впервые квантовая задача решалась путем *геометрических* рассуждений в конфигурационном пространстве гамильтоновой динамики.

Очевидно, что именно эта абстрактная физика привела не только к матричной механике Гейзенберга, но и к теории q -чисел Дирака, и к работам Шредингера, где волна де Бройля потеряла свой непосредственный физический смысл, так как, согласно Шредингеру, она распространяется уже не в обычном, а в конфигурационном пространстве, где система частиц характеризуется одной волной. Именно к этой абстрактной волне, обобщая идеи де Бройля, Шредингер и применил принцип Гюйгенса.

Опираясь на такую тенденцию, представители копенгагенской школы вскоре пришли к установлению принципа, который был четко сформулирован Бором и Гейзенбергом [3 — 5] и роль которого ясно иллюстрируется нижеприведенной таблицей, заимствованной у Бора¹⁾.

Опираясь на соотношения неопределенностей и вообще на математическую структуру квантовых теорий, складывающихся в результате работ Гейзенберга, Шредингера, Дирака, Борна и фон Неймана, Бор и его последователи вскоре пришли к полному отрицанию возможности любого причинного и пространственно-временного описания квантовых явлений. Другими словами, левый столбец в таблице Бора решительно отбрасывается в прошлое физики, а

¹⁾ Цитируется Гейзенбергом [3, с.53].

Классическая теория	Квантовая теория	
	Либо	Либо
Описание явлений в пространстве и времени	Описание явлений в пространстве и времени	Математическая схема, не соответствующая ни 3-мерному пространству, ни времени
Причинность	Соотношения неопределенностей	Причинность

Эти альтернативные описания связаны статистически

все будущее физики — в правой части таблицы. Для представителей копенгагенской школы не имело никакого смысла говорить *одновременно* о локализации электрона и о его волновых свойствах; согласно Бору, эти два аспекта реальности носят *взаимно-дополнительный* характер и ничто не теряется, если отказаться от их совместного существования в один и тот же момент времени, поскольку было известно, что никакие тонкие физические опыты не позволяют обнаружить одновременное проявление этих двух свойств.

Такая интерпретация теории сама имеет две стороны.

1. Прежде всего она исходит из философских представлений, примыкающих к позитивизму (поскольку утверждает, что теория может оперировать лишь с наблюдаемыми величинами), к идеализму (поскольку признает существование явления лишь в момент наблюдения) и, наконец, к индетерминизму (поскольку отказывается в микрофизике от причинного описания отдельных процессов в пространстве и времени).

2. Но, с другой стороны, в ней есть что-то от эмпирического подхода, что, несомненно, сыграло решающую роль в успехах этого направления в период бурного развития физики. Позиция копенгагенской школы в какой-то степени выражается словами Гете: «Не ищите ничего за фактами, они сами и есть доктрина». Ее представители могли бы сказать даже: «Не ищите ничего за формулами, они и есть сама реальность». Несомненно, что в период быстрого развития теории, когда существенные детали математического аппарата (такие, как принцип суперпозиции волновых функций, правила соответствия между физическими величинами и операторами и т. д.) еще разрабатывались, подобная позиция освобождала сознание от поисков чрезвычайно сложных физических образов, скрывающихся за математическими формулами и ответственных за наблюдаемые факты.

Бесспорно, все это способствовало продвижению теории вперед. Именно это обстоятельство остро почувствовал Луи де Бройль в то время, когда он испытывал большие трудности в нахождении математического выражения для дуализма волна — частица в пространстве-времени. Вот как он говорит об этом в монографии «Физика и микрофизика» (с. 174): «Но чем больше усилий я прилагал к тому, чтобы отлить в существовавшую форму новый материал моих идей о волновой механике, тем больше были трудности, и непрерывно нарастающее ощущение этих трудностей помешало мне в 1925 г. быст-

ро развить построение, которое я было начал». Напомним, что 1925 год — это год, когда он вплотную подошел к волновому уравнению, но не довел дело до конца.

Его первые работы о сингулярных решениях уравнения Шредингера и релятивистского волнового уравнения возродили было у него некоторую надежду. Но тотчас же перед ним встали одно препятствие за другим. Нужно было провести общее исследование сингулярных решений, изучить странное и мало-правдоподобное свойство сингулярности в стационарных состояниях, но особенно большая проблема возникала при пространственно-временном описании системы частиц, которое должно было заменить теорию Шредингера, относящуюся к конфигурационному пространству.

Луи де Бройль, которому Лоренц предложил сделать доклад на знаменитом Сольвеевском конгрессе 1927 г., был обеспокоен математическими трудностями теории двойного решения и поэтому дал для нее лишь упрощенный вариант, который он назвал «теорией волны-пилота». В этом варианте к непрерывной волне Шредингера добавлялся скрытый параметр, описывающий местонахождение частицы, движущейся вдоль линий, нормальных к волновой поверхности.

Таким путем де Бройлю удалось обойти некоторые математические трудности теории двойного решения, но платой за это была потеря логической последовательности его причинной теории, поскольку теперь частица должна была «пилотироваться» непрерывной волной, в которой все усмотрели вероятностный смысл, чем его противники не преминули воспользоваться. Доклад Луи де Бройля вызвал резкую критику со стороны Паули, его не поддержали ни Шредингер, не веривший в существование частиц, ни Лоренц, чувствовавший к нему симпатию, но слишком обремененный возрастом, ни Эйнштейн, который ограничился подбадриванием, не выказывая явного одобрения, хотя сам и нападал на копенгагенскую школу. Одиному де Бройлю противостояла «великолепная пятерка», состоявшая из Бора, Гейзенберга, Борна, Паули и Дирака, которые выставляли не без помпезности, не будучи склонны к компромиссам, свою вероятностную интерпретацию квантовой механики. В этой интерпретации имелись, как имеются и сейчас еще, некоторые отмеченные Эйнштейном концептуальные слабости, но она оказалась самой удобной и самой близкой к опыту из всего того, что было предложено до сих пор.

Удрученный дискуссией на Сольвеевском конгрессе и отчаявшись решить поставленные им самим проблемы, к тому же только что назначенный на должность профессора Института Анри Пуанкаре Луи де Бройль оказался перед трудной дилеммой — какую теорию ему преподавать. И он, к сожалению, вскоре примкнул к господствующему течению в физике и согласился с копенгагенской интерпретацией квантовой механики.

Однако такой ход событий предполагал глубокую перестройку его взглядов, поскольку Луи де Бройлю нужно было не только отказаться от своей собственной интерпретации волновой механики (что само по себе было весьма болезненно), но еще и перейти на новый способ мышления, который был ему глубоко чужд и даже противоречил его самым глубоким интуитивным представлениям.

В результате в течение 5 лет с 1927 по 1932 г., помимо нескольких мелких работ, он не опубликовал ни одного значительного труда!

Затем он неожиданно прервал свое долгое молчание и за несколько лет сделал свое второе большое открытие: волновую механику фотона, о которой Гейзенберг позднее писал [6]: «Мысль, высказанная де Бройлем в 1936 г.¹⁾, о том, что кванты света тоже следует рассматривать как сложные образования, приводит к принципиальным проблемам такого же значения, как и в случае открытия волн вещества».

Мы не можем здесь хотя бы кратко изложить эту теорию, но по крайней мере нужно знать занимаемое ею место на творческом пути де Бройля, чтобы понять, как он пришел ко второму своему повороту и вернулся к истокам.

Не следует забывать, что волновая механика возникла в результате обобщения идей Эйнштейна о корпускулярно-волновом дуализме света на случай всех видов вещества, но любопытно то, что фотон не подчинялся первым уравнениям волновой механики — уравнение Шредингера не было релятивистским, а уравнение Клейна — Гордона не учитывало поляризации частиц. Эта загадка не могла оставить де Бройля безразличным, и более чем кто-либо другой он пытался включить в рамки теории и свет, изучение которого и привело к созданию волновой механики. Он чувствовал, что со времени появления теории Дирака это стало возможным. Теорию электрона де Бройль знал очень хорошо, о чем можно судить по его великолепной книге «Магнитный электрон» (издательство Нептапп, 1934)²⁾. Теория была релятивистской и содержала все необходимое для описания поляризации (спина), а среди определяемых ею величин имелся даже антисимметричный тензор ранга 2, такой же, как в теории Максвелла. Но значение спина $\frac{1}{2}$ в ней не то, какое нужно, и соответствующая статистика оказывается статистикой Ферми, а не Бозе, тогда как фотон определенно не является частицей Дирака.

Луи де Бройль потратил несколько лет на то, чтобы найти разгадку этой тайны. Руководствуясь соображениями симметрии и принимая во внимание возможность аннигиляции фотона в явлениях типа фотоэффекта, а также усматривая аналогию с аннигиляцией электрон-позитронной пары в теории Дирака, он пришел к мысли о том, что фотон не должен быть элементарной частицей, а точнее, должен состоять из двух дираковских частиц с очень малой массой. Возможно, что эти частицы — *нейтрино*, откуда и произошло нередко употребляемое название «нейтринная теория света». В 1934 г. он нашел волновые уравнения для такой составной частицы. Путем алгебраических преобразований было показано, что уравнения де Бройля, получаемые в результате своего рода *слияния* двух уравнений Дирака, могут распадаться на две различные системы уравнений. Первая из них описывает частицу со спином, равным нулю, которая пока экспериментально не наблюдалась, а вторая — это систе-

¹⁾ Ссылка Гейзенберга не точна — теория была предложена в 1934 г.

²⁾ Имеется перевод: *Луи де Бройль. Магнитный электрон (теория Дирака)*. — Харьков: ОНТИ, 1936 г. — *Прим. перев.*

ма уравнений Максвелла, дополненных поправочными членами, включающими электромагнитные потенциалы. Эти дополнительные члены очень малы, поскольку в них в качестве множителя входит собственная масса фотона. Но они не могут полностью сократиться в силу одного обстоятельства, в котором внутренняя логика теории объединяется с глубоким убеждением де Бройля: для согласованности вычислений оказывается необходимым, чтобы собственная масса фотона была отлична от нуля.

Сколь бы малы ни были эти поправочные члены, их достаточно, чтобы нарушить калибровочную инвариантность теории, и вытекающее отсюда калибровочное условие автоматически оказывается калибровочным условием Лоренца.

Хотя теория де Бройля и не лишена трудностей, нельзя не восхищаться этим грандиозным синтезом вещества и света, полученным с помощью волновой механики и лежащим в основе очень большого числа научных работ. Луи де Бройль вместе со своими учениками работал над этой проблемой более десяти лет и посвятил ей, а также ее обобщению на частицы с произвольным спином двадцать научных статей и шесть книг.

Впрочем, интересно, что во всех этих работах больше прослеживается присущая автору глубина мысли и свойственный ему метод рассуждений, нежели приверженность идеям Бора, а также более абстрактным и формальным способам мышления, введенным в физику: человек может изменить свои сознательные убеждения, но не свою натуру.

Волновая механика фотона превосходно построена как *физическая модель* в обычном пространстве. Ее понятия очень близки к классическим образам и отличаются от них лишь в той степени, в какой используется математический язык квантовой механики, в частности теории Дирака. Но формальная инвариантность по отношению к группе и, в частности, использование представлений группы не являются для де Бройля эвристическим приемом, как для других физиков, таких, как Гейзенберг, Паули, Йордан или Дирак. Например, хотя мысль о связи между уравнениями для частиц со спином и конечными представлениями группы Лоренца не принадлежит де Бройлю, она была высказана только *после* того как де Бройль открыл путь построения теории света, основываясь на интуитивных соображениях, относящихся к испусканию и поглощению фотонов, к их возможной связи с парами частиц Дирака, со свойством центра тяжести пары релятивистских частиц и т. д. Эти тонкие связи между «абстрактными теориями и конкретными представлениями в современной физике» были с большой глубиной проанализированы им в работе [III, 3, с. 91], в которой он показал, что, отдавая себе отчет в силе и строгости абстрактных рассуждений, он вместе с тем убежден в том, что вся суть все-таки в конкретных образах, всегда неясных и неустойчивых, без конца пересматриваемых и чаще всего отвергаемых как более или менее ложные.

По правде говоря, в его теории света принятие идей копенгагенской школы проявилось лишь в заимствовании алгоритмов, ставших обычными в квантовой механике, в частности в использовании методов расчета вероятностей перехода, выражаемых через волновую функцию и эрмитовы операторы, сопоставляемые физическим величинам. Короче говоря, он пользовался тем же

языком, что и все остальные, и это *фактически* означало отказ от его идеи безусловной локализации частиц, а следовательно, отказ от его первоначальной программы в пользу концепций Бора и Гейзенберга, к которым он присоединился в конце концов, по его собственным словам, с убежденностью, все более возраставшей после новых и новых попыток избежать этого [II, 4, с. 166].

Следует признать, что ему вряд ли удалось бы тем или иным путем осуществить далеко идущую программу, которую он первоначально наметил, ибо мы знаем, сколь велики были трудности, стоявшие перед ним. Но зато, может быть, этот отказ и позволил снова замкнуть то большое кольцо, которое он сам разомкнул и которое объединило электрон с фотоном в мировоззрении волновой механики.

Но когда это кольцо было снова замкнуто (в сороковые годы, во время войны), перед де Бройлем открылась удручающая пустота, так как возник вопрос, что ему делать дальше. Синтез, о котором он мечтал, в общих чертах был достигнут, и в рамках известной ему теории не было видно путей для его дальнейшего совершенствования. Единственной проблемой, которая соответствовала его амбициям, была проблема атомного ядра. Однако, изучив ее очень внимательно (по этому вопросу им было написано три монографии), он остался неудовлетворенным существующими теориями и вынужден был признать, что не знает, как их улучшить. И тогда он начал задумываться: объясняются ли недостатки теории ядра ее временной незавершенностью или же причина глубже — неудовлетворительны сами квантовые теории?

Именно поэтому он и не прилагал все свои силы к решению данной проблемы. А ведь в свои пятьдесят лет он был в отличной интеллектуальной форме. Его здоровье не было ослаблено ничем, кроме пережитых трудностей военного времени, дававших себя знать в течение нескольких лет. В тот период он плохо питался, мерз зимой, как и все, и, оставляя свой выстуженный кабинет, куда можно было войти лишь в пальто, чтобы взять книгу, шел работать в уединении в свою комнату, отапливаемую дровами из парка Шантйи, принадлежащего Институту Франции. Но это были только временные неудобства. Настоящие трудности начались тогда, когда он находился на вершине своей научной карьеры и был обременен всевозможными обязанностями, которые, впрочем, не помешали ему благодаря монашескому образу жизни и уединенной работе написать между 1941 и 1951 г. (в период, который нас больше всего интересует) тринадцать книг и тридцать три оригинальные научные работы.

Здесь нужно подчеркнуть чрезвычайно широкий диапазон и даже кажущуюся разнородность его научных интересов, что, судя по его статьям того времени, свидетельствовало об отсутствии большой цели, над которой он мог бы работать. В самом деле, на протяжении этих десяти лет Луи де Бройль писал и о фотоне, и о частицах со спином (которые все меньше интересовали его), о ядре, волноводах, электронной оптике, адиабатических инвариантах в классической механике, о релятивистском изменении температуры, об особенностях вероятностной схемы квантовой теории, о фазовых волнах и о собственной ча-

стоте электрона (что было сделано впервые после двадцатилетнего перерыва), об экспериментальной проблеме измерения спина, о квантовой теории поля, о термодинамических аналогиях в классической механике и электродинамике, и, наконец, поскольку все у него сосредоточивалось вокруг квантовой теории, он написал данную книгу или, точнее, как мы знаем, подготовил лекционный курс, который он должен был читать в 1952 — 1953 учебном году в Институте Анри Пуанкаре.

Но если подробнее изучить эти книги и научные работы, собрать все замечания, проскальзывавшие то здесь то там на протяжении многих лет в беседах с их автором, как это мог сделать я, и если, наконец, принять во внимание работы, написанные им впоследствии, то список перечисленных выше тем легко привести в стройную систему.

Конечно, некоторые из них, как, например, проблема волноводов (поставленная в самом начале войны правительством) или корпускулярная оптика, которой он занялся, по-видимому, по настоянию своих сотрудников, носили случайный характер. Но даже в этих работах, представляющихся очень специальными, время от времени появляются отдельные глубокие замечания (и даже подробные рассуждения) о волнах и о волновой оптике, которые Луи де Бройль использовал и развил в дальнейшем. Работы, посвященные фотону и частицам со спином, не требуют пояснений, поскольку они, очевидно, являются главным достижением рассматриваемого периода; работы, посвященные ядру, как мы уже говорили, имели своей целью исследование принципиальных возможностей применения волновой механики в этой области и привели Луи де Бройля к выводу, что пределы применимости существующей теории, пожалуй, уже достигнуты. То же самое можно сказать о работах по квантовой теории поля, в которых он никогда не допускал мысли, что вычислительные ухищрения, хотя бы самые изощренные, позволят решить проблему «бесконечностей». В результате в 1950 г. он пришел к убеждению, что трудности теории ядра, как и трудности квантовой электродинамики, неустранимы в рамках общепринятых представлений и обусловлены фундаментальной неспособностью всей теории в целом описывать пространственно-временные структуры. Это свое крепнущее убеждение, окончательно выкристаллизовавшееся к 1952 г., он выразил следующей недвусмысленной фразой: «На сегодняшний день возможна объяснения явлений волновой механикой в том виде, в котором она преподается, представляются в значительной степени исчерпанными» [III, 6, с. 143]. Именно этим новым состоянием ума объясняется многообразие тем его размышлений, перечисленных выше, включая и данную книгу. В самом деле, эти работы можно разделить на две существенно различные группы. С одной стороны, он снова занялся изучением наиболее глубоких оснований и далеко идущих следствий квантовой теории с обращением к волновой механике в той форме, в какой он ее разрабатывал ранее, и к термодинамике, классической и релятивистской механике, послужившим основой его дальнейших многочисленных работ. Но с другой стороны, он занимался вопросами интерпретации волновой механики, которую сам преподавал в той форме, которая стала классической и ортодоксальной и которая нашла отра-

жение в его работах о вероятностной схеме теории и об измерении спина и, очевидно, в наибольшей степени в настоящей книге. И не была ли эта книга, как часто полагают в таких случаях, попыткой убедить самого себя? По правде говоря, я этого не знаю. Сам де Бройль, несомненно, этого тоже не знал. Подобного рода догадки относятся к области подсознательного, и потому их правильность невозможно проверить. Скажем просто, что Луи де Бройль, размышляя над этими проблемами, тщательно пересмотрел их и хотел донести до своей аудитории плоды своих размышлений. Несомненно одно: его изложение является абсолютно ортодоксальным, убедительным и убеждающим! Лишь сложный анализ может вызвать сомнения в данных вопросах, но такого анализа не было в первоначальном тексте: все приводимые нами критические замечания были сформулированы впоследствии, в том числе и те из них, которые состоят лишь из нескольких слов (точное время внесения которых неизвестно). В равной степени представляется несомненным, что, работая над этой книгой, Луи де Бройль совсем не предполагал вернуться к теории двойного решения и тем более к теории волны-пилота.

Между тем летом 1951 г., т. е. в период между написанием двух частей этой книги, но когда, по-видимому, рукопись была уже совершенно готова или по меньшей мере вчерне набросана, де Бройль получил из Принстона *препринт* большой работы молодого физика, который еще был мало известен во Франции, несмотря на свои работы в области плазмы и на свою замечательную книгу по квантовой механике, только что вышедшую из печати. Этим физиком был Дэвид Бом. В его работе рассматривалась и развивалась теория волны-пилота, относительно которой Дэвид Бом узнал, уже написав свою статью и едва успев вставить новую ссылку в библиографию, что такую же теорию создал, но почти сразу же оставил де Бройль 25 лет назад.

Первая реакция Луи де Бройля была отрицательной [1, 93]. Лучше, чем кому-либо другому, ему были известны возражения против теории волны-пилота. Главным из них было то, что нельзя говорить о причинной обусловленности движения частицы, если связанная с ней волна распространяется не в физическом, а в конфигурационном пространстве и притом претерпевает *редукцию пакета вероятностей* при измерении координаты частицы.

И все же после прочтения статьи Бома как бы развеялись некие чары, под гнетом которых давно находился де Бройль. Этими чарами, долгое время сковывавшими не только его, но и почти всех других теоретиков, был весь научно-философский язык, затканый понятиями *неопределенности* и *дополнительности*, которыми представители копенгагенской школы завуалировали квантовый формализм и который только что был увенчан (и даже увековечен) знаменитой теоремой фон Неймана. В этой теореме путем внушительных математических построений доказывалось, что в причинной теории со скрытыми параметрами нельзя учесть квантовые законы.

Если задуматься над теоремой фон Неймана, то становится ясным, что за ней кроется чрезмерная с философской точки зрения претензия: средствами самой теории доказать, что принципы, на которых она основана, окончательны и суть предел человеческого познания. Здесь перед нами опять, в новой форме,

лишь внешне похожей на антиномию, предстают триумфализм и крайности лапласовского детерминизма. И что же! Луи де Бройль, который только что излагал в своем курсе теорему фон Неймана как непреложную истину, которую в течение 25 лет никто не оспаривал, вдруг понял, что теория волны-пилота, как бы несовершенна она ни была, может служить контрпримером для этой теоремы, согласно которой такой теории в принципе не должно быть. В рукописи он добавил важное примечание, начальная фраза которого несет еще оттенок колебаний: «Однако существование теории волны-пилота, по-видимому, указывает на то, что в рассуждениях фон Неймана есть слабое место».

И затем он показал, как это будет видно в настоящей книге, что слабое место — неявное предположение фон Неймана о том, что все распределения вероятностей, предсказываемые квантовой механикой, должны реализоваться одновременно, даже если они относятся к величинам, которые нельзя одновременно измерять. Де Бройль, очевидно, был подготовлен к проведению такого рода анализа своим чрезвычайно прозрачным исследованием вероятностной схемы квантовой механики, опубликованным незадолго до этого [V, 44; III, 9]. Позднее он развил свои соображения в ряде работ [II, 27, 29, 33], которые, на мой взгляд, содержат единственное истинно физическое опровержение теоремы фон Неймана. Позже были предложены другие опровержения. Поскольку уязвимые места теоремы уже были обнаружены, нетрудно было заметить и другие ее слабости, носящие логический или формальный характер. Это не лишено интереса, но, на мой взгляд, более важными представляются физические рассуждения, которые, опираясь на статистическую схему теории, обращаются к фундаментальной проблеме корпускулярно-волнового дуализма. Именно поэтому опровержение де Бройля сохраняет свою силу и против других аналогичных теорем, даже если их преподносят в совершенно иной форме¹⁾.

Для де Бройля это опровержение теоремы фон Неймана имело очень важное значение, поскольку за приоткрывшейся пеленой он снова увидел перед собой образ мира, ранее им созданный и почти стершийся в его памяти.

Это и было его вторым поворотом. Это тот образ, который, как мы увидим в данной книге в нескольких коротких примечаниях, стал понемногу снова воссоздаваться в его сознании, оформляться по частям, о котором он высказывался со всей осторожностью последних сомнений, но в который он начал снова верить и который пытался довести до совершенства и расширить в последний период своей жизни.

Ни один физик не может остаться безразличным к этим взглядам вне зависимости от того, соглашается он с ними или нет. Здесь проявляется другое понимание микрофизики, совершенно отличное от того, которому обычно учат, и все должны знать о его существовании, поскольку с ним связано рождение волновой механики.

¹⁾ Отметим также, что в цитированной работе Бома теорема фон Неймана отвергается в итоге рассуждений (об измерениях), которые близки к рассуждениям де Бройля, но которые Бом лишь намечает.

Не несет ли этот поздний возврат к той же самой теории того же самого ученого какие-либо новые открытия хотя бы в зародыше?

Лично я считаю, что несет, и скажу позднее, какие. Но я думаю, что на этот труд умудренного опытом знаменитого физика прежде всего надо смотреть так же, как на скульптурную группу Микеланджело «Пьета», выставленную в Милане и тоже бывшую более поздним вариантом; она может показаться грубой и незавершенной по сравнению с прекрасной «Пьета» в Ватикане, но разве это не ранний предвестник искусства нашего времени?

Такой пример из области искусства столь же естествен, когда речь идет об этом физике и литераторе, как и тогда, когда речь заходит об Эйнштейне — человеке науки, которым он больше чем кем-либо другим восхищался. Но если развитие темы Эйнштейном напоминает о музыкальной гармонии, то подобного рода метафора в применении к де Бройлю была бы не совсем уместна: музыка — единственный вид искусства, которому он всегда был чужд. Но мне представляется, что в творчестве де Бройля были два ключа.

Первый из них — это, очевидно, История. Он столько ее изучал, что, как он мне однажды сказал, прочитал, наверное, больше книг по истории, чем по физике. Но главную роль в его научном творчестве играла история физики, в частности с XVI и особенно с XVII в. Эти занятия не были для него своего рода любопытством или увлечением культурного человека, они являлись одновременно движущей силой его духа и питательной почвой для его мыслей. Его знаменитая диссертация 1924 г. начиналась словом «История», и это не случайно.

Вторым ключом в его творчестве была наглядность: это поиск картины внешнего мира, которую вслед за Планком он охотно называл немецким словом "Weltbild"¹⁾. Для де Бройля понимать — значит наглядно представлять. Для него модель должна быть конкретной и являться наглядным образом в физическом пространстве. Его научный язык очень прозрачен, и в нем чаще, чем где-либо, встречаются метафоры, заимствованные из оптики и относящиеся к зрению. У него большая идея — чаще всего «луч света» или «вспышка в ночи». «Творят лишь те, кто видят воображаемое, как наяву», — любил он повторять. О нашей *внутренней жизни* он говорит: «Все, что мы знаем, проходит через эту жизнь и *преломляется* в ней» [III, 6, с. 250]. Касаясь открытия волновой механики, он вспоминает: «Мой ум вдруг залил яркий свет» [III, 6, с. 180]. Для него радость в том, чтобы *видеть*, и по поводу открытия атомизма и статистической физики он однажды воскликнул: «В этот день пелена спала с глаз и мы наконец с облегчением увидели физическую реальность такой, какой она скрывается за абстрактными формами классической термодинамики» [III, 3, с. 93].

Его воображение, воображение релятивиста до глубины души, работает в своего рода четырехмерном континууме, заимствуя у истории временное изме-

¹⁾ Weltbild (нем.) — (физическое) мировоззрение. — *Прим. перев.*

рение и выражаясь в пространственных образах. «Есть, — как он говорит, — лишь одна физическая реальность: перемещение элементов, локализованных в пространстве, с течением времени» [V, 65]. Для де Бройля большая идея — это проявление в едином пространственном образе того синтеза, который возникает, когда вдруг замечаешь аналогию между различными физическими законами или представлениями, долгое время считавшимися противоречивыми. Для него созидание — это непременно феерия поэтического видения, после которой он не может не испытывать грустного чувства при виде того, как в его собственных руках или в руках других новая мысль теряет свой блеск, приобретая математическое выражение, хотя это и необходимо. О его необычайной потребности в образах говорит то, в чем его заветная мечта [III, 6]: что, может быть, то, что мы воспринимаем в пространстве-времени, еще не есть истинная картина и что физик подобен ткачу, работающему над ковром со стороны изнанки, который сможет по-настоящему взглянуть на свою работу «лишь в тот день, когда он перевернет ковер и посмотрит на него с лицевой стороны».

Итак, де Бройль снова обратился к своей физике и снова стал смотреть на мир так, как смотрел в молодости. В течение нескольких месяцев он заново рассмотрел трудные аспекты, получив возможность говорить о них со все большей уверенностью, освободился от навязанных ему чуждых представлений и начал критиковать их, а также критически анализировать технические проблемы, возникающие в его собственной теории.

Опираясь на новую группу молодых учеников, он приступил к разработке проблемы движения сингулярностей, недеформируемых волновых пакетов, являющихся решениями нелинейных уравнений (того, что сейчас называется *солитонами*). Он обобщил свои идеи на случай теории Дирака, на оптическую теорию преломляющих сред и, по крайней мере частично, на случай систем частиц. Им была разработана новая квантовая теория измерений, построены динамика частицы с переменной собственной массой и релятивистская термодинамика. Наконец, им были сформулированы идеи скрытой термодинамики изолированной частицы. Все это можно найти в последующих пятидесяти научных работах и в четырнадцати книгах, включая эту.

Из упомянутого многообразия я позволю себе выделить две идеи, которые мне представляются наиболее важными.

Первая из них — идея солитонов, которые в Институте Анри Пуанкаре мы называем *волнами с горбом*. Эта идея де Бройля, ранее считавшаяся устарелой и слишком классической, сейчас играет все большую роль, как уже говорилось выше. Ей, несомненно, принадлежит большое будущее, но при условии, что будет решена фундаментальная проблема, с которой мы имеем дело уже в течение 25 лет, а именно отсутствие *общего принципа*, на основании которого мы могли бы выбрать одно нелинейное волновое уравнение из бесчисленного множества возможных. Если когда-либо мы сможем найти такое уравнение, то родится новая микрофизика.

Вторая идея — термодинамика изолированной частицы, которую де Бройль предложил, опираясь, с одной стороны, на аналогию между реляти-

вистским поведением частоты и температуры¹⁾ и, с другой стороны, на близость трех великих экстремальных принципов физики: принципов Ферма, Мопертюи и Карно.

Это тоже пока еще не настоящая теория, а лишь наметка синтеза идей, к которому, возможно, мы когда-либо придем, может быть через год, а может быть и через столетие. Кто знает? Напомним, что во времена Лапласа сомнения вызывал даже принцип Ферма и что спустя столетие после Гюйгенса его знаменитый принцип все еще не находил приложения.

Великие идеи медленно пробивают себе дорогу, что с трудом понимается в нашу беспокойную эпоху, когда почти не остается времени для поэтических раздумий. В этом, несомненно, одна из причин того, что окруженный всеми возможными почестями Луи де Бройль в последние годы игнорировался всеми, кроме небольшого круга своих учеников. Последнее, возможно, связано еще и с тем, что перед лицом уверенной в себе господствующей школы, опирающейся на свои догматически понимаемые концепции и мало расположенной оставлять завоеванные позиции, он строго и непримиримо следовал традиции французской науки, науки Ферма, Лапласа, Френеля и Пуанкаре, которой сегодня зачастую пренебрегают, предпочитая более прагматические и более формальные, но в то же время и более интернациональные и в большей мере коллективные методы исследований. Но какова бы ни была необходимость коллективной организации научной работы, не следует забывать, что никогда еще большой научный коллектив не выдвигал большой научной идеи. Идеи выдвигают люди, а научные коллективы их лишь развивают. Если бы в науке не было ярких индивидуальных личностей, то в ней больше не было бы и идей. К тому же, сколь бы ни были велики выгоды международного научного сотрудничества, не нужно забывать, что, хотя результаты науки носят интернациональный (и, мы надеемся, даже всемирный) характер, склад ума и способ мышления ученых, особенности их научной работы остаются национальными. По этой причине только американцы по-настоящему знают, как делать большую науку по-американски, немцы — по-немецки и т. д. И если французы пренебрегут французскими традициями, то кто же другой воскресит их для них? Каждая традиция должна обогащаться другими и развиваться, испытывая их плодотворное воздействие, однако если ученые одной страны будут слишком следовать формам, пришедшим извне, то они, может быть, и приобретут большую международную известность, но их роль в науке будет мельче.

Перед лицом все возрастающего значения научных коллективов и безличного влияния комиссий специалистов, которые он рассматривал как факторы

¹⁾ Вопрос о релятивистском преобразовании температуры остается спорным, поскольку формула Планка — Эйнштейна — Лауэ, использованная де Бройлем, вызвала возражения [7]. Но, вообще говоря, можно оспаривать и релятивистский закон преобразования частоты [8], а это не помешало в свое время тому, что на базе общепринятой релятивистской формулы для частоты была создана волновая механика. Дискуссии по данным вопросам продолжают.

унификации мышления, Луи де Бройль не раз восставал против опасности чрезмерного централизма в науке, подчеркивая настоятельную необходимость свободы научного творчества и отсутствия помех пересмотру оснований общепринятых теорий и принципов.

Именно в этом, возможно, заключается существо живого огня, переданного им по эстафете Обществу Луи де Бройля, которому он завещал свой идеал физической ясности и интуитивного поиска простых теоретических образов и, пожалуй, еще в большей степени свою глубокую убежденность в том, что ни одна теория или гипотеза не формулируется на все времена и что поэтому никакие критические замечания, никакие идеи не должны отвергаться без обсуждения.

Признаюсь, что я с большим волнением заканчиваю настоящее предисловие вместо моего учителя, который для меня столь высок и в то же время столь близок. Вместо него, написавшего столько предисловий! . . . Уставший от бесконечных забот и обремененный преклонным возрастом, он не смог сам написать предисловие к этой книге. Но я хотя бы оставляю за ним последнее слово, поместив далее заметку, которую он представил в Академию наук по случаю пятидесятилетия волновой механики и которую мы можем считать его научным завещанием.

ОБ ИСТИННЫХ ИДЕЙНЫХ ОСНОВАНИЯХ ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКИ¹⁾

По случаю пятидесятой годовщины открытия волновой механики автор напоминает идеи, какими он руководствовался в то время, и высказывает соображения, по которым ныне ему представляется необходимым вернуться к этим идеям, о которых забывают при изложении современной квантовой механики.

Исходные принципы волновой механики я изложил в трех заметках, опубликованных в Трудах АН Франции в сентябре — октябре 1923 г., а затем более подробно в своей докторской диссертации, защищенной 25 ноября 1924 г. Моей основной идеей было перенесение на все частицы принципа сосуществования волн и частиц, открытого Эйнштейном в 1905 г. для случая света и фотонов. Опираясь на прозрачные идеи классической физики, я попытался представить реальную физическую волну как носителя очень малых объектов, локализованных в пространстве в любой момент времени. Мне думалось, что это можно было сделать двумя способами. Первый из них, который в обычном изложении сейчас почти не применяется и который тем не менее в настоящее время я считаю наиболее глубоким, был кратко рассмотрен в одной из моих заметок 1923 г. и развит в первой главе моей докторской диссертации. Он опирался на различия в релятивистских трансформационных свойствах частоты волны и частоты часов. Допуская, что частица характеризуется внутренними колебаниями, в силу чего можно рассматривать ее как некие часы бесконечно малых размеров, я предположил, что эти часы движутся вместе с волной и что их внутренние колебания всегда находятся в фазе с колебаниями волны. Это и есть постулат «согласованности фаз». Данные гипотезы представлялись мне необходимыми, так как из соотношения $W = h\nu$, примененного к частице, следует существование внутренних колебаний частицы с частотой ν , а из работ Планка и Эйнштейна известно, что ν есть *также* частота волны, переносящей частицу. Частица как бы связана с волной, в которой она занимает очень малую область, где амплитуда очень велика. Отсюда можно получить хорошо известную формулу $p = h/\lambda$. Во второй главе своей диссер-

¹⁾ Заметка, представленная Луи де Бройлем, действительным членом АН Франции, заседанию Академии 25 июня 1973 г. (Compt. Rend., 277, 1973).

тации я далее показал, что если рассматривать распространение волны в приближении геометрической оптики, то мы приходим к отождествлению принципа Ферма с принципом наименьшего действия Мопертюи и снова получаем формулу $p = h/\lambda$.

Следует подчеркнуть различия между этими двумя способами описания, о которых я только что говорил. Первый из них, связанный с постулатом согласованности фаз, носит релятивистский характер, поскольку основывается на различии между двумя формулами релятивистского преобразования, тогда как второй, опирающийся на отождествление принципов Ферма и Мопертюи, по существу не является релятивистским, поскольку эти два принципа в равной степени справедливы и в классической теории, и в релятивистской. Второе различие между двумя методами заключается в том, что первый справедлив для любых видов распространения волн, а второй имеет смысл лишь для случая распространения волн в приближении геометрической оптики.

После опубликования моей диссертации мои идеи часто интерпретировали неверно, говоря, что я считаю электрон *волной*, и ничего не говоря о частице. Мне представляется, что именно приняв эту идею Шредингер в 1926 г. в очень изящных работах впервые записал для электрона уравнение, описывающее распространение волны, названной им волной ψ , хотя сделал это лишь в ньютоновском приближении и без учета спина. Таким образом он смог точно рассчитать волновые процессы, соответствующие квантовым состояниям атомной системы, которая после работ Бора и его последователей все еще описывалась классически. Конечно, Шредингер тогда думал, что его волна ψ является физической волной, но он совершенно отказался от идеи локализации частицы в волне, так что в том образе атома и в более общем случае волн ψ , который у него сформировался, больше не оставалось места для локализованных частиц. Это было очень серьезным видоизменением и превращало в парадокс использование им конфигурационного пространства в случае систем частиц. Вскоре Борн ввел нормировку волны ψ и путем произвольного изменения амплитуды волны лишил ее прямого физического смысла. Таким образом, нормированная волна ψ превращается в простую характеристику вероятностного распределения, которое приводит к очень большому числу точных предсказаний, но не дает какого-либо вразумительного объяснения одновременного существования волн и частиц.

Работы Шредингера показали, что волновая механика, примененная к атомным системам, приводит к задачам, рассмотрение которых в приближении геометрической оптики оказывается более невозможным. Отсюда следует, что принцип Ферма более неприменим и что он уже не дает возможности ввести понятие «луча», сопоставляемого с траекторией частицы. Поэтому если отказаться от постулата согласованности фаз, то мы приходим к невозможности приписать траекторию частице, движущейся в волне, и к утверждению, что для частиц возможны лишь изолированные локализации *без промежуточных положений*. Но такое представление приводит к большим трудностям, которые, в частности, были отмечены Эйнштейном на Сольвеевском конгрессе 1927 г. Их можно резюмировать следующим образом. Пусть имеется источник, испускающий сферическую волну, которая несет одну частицу. В

последующий момент времени частица обнаруживает свое присутствие в некоторой точке сферической волны по некоторому эффекту, локализованному в детекторе. Совершенно очевидно, что *причиной* попадания частицы в детектор является испускание ее источником. Но причинная связь между этими двумя явлениями может быть установлена лишь при существовании траектории, и отрицать ее существование — значит отрицать причинность, т. е. обречь себя на непонимание.

Сделаем теперь важное замечание. Поскольку нормировка, произвольным образом меняющая амплитуду волны, не изменяет ее фазы, обычная квантовая механика дает возможность определить ту же самую частоту ν и ту же длину волны λ , что и моя теория. Именно это делает квантовую механику эффективной теорией, приводящей к многочисленным точным предсказаниям. Но в противоположность тому, что обычно делается, в квантовой механике мы не имеем права полагать $W = h\nu$ и $p = h/\lambda$, поскольку энергия W и импульс p частицы — это величины, связанные с понятием локализованного объекта, распространяющегося в пространстве по траектории. Если мне ранее и удалось установить эти формулы, то лишь благодаря предположению, что частица локализована в своей волне.

Приступив в 1928 г. к преподавательской деятельности, я излагал идеи, которые были господствующими в квантовой механике, и в течение долгих лет отказывался от развития своих собственных первоначальных идей.

Но примерно через 20 лет я понял, что необходимо снова вернуться к представлению о частице как об очень малом локализованном объекте, движущемся по траектории. Как я показал в серии все более детализированных работ [II, 32], именно это дало мне возможность, сохраняя статистический смысл нормированной волны ψ , обосновать представление о том, что частица пилотируется своей волной. Это представление было дополнено скрытой термодинамикой, развитие которой открывает очень большие новые перспективы. Особенно важным мне представляется следующий вывод этой термодинамики: принцип наименьшего действия есть лишь следствие второго начала термодинамики [II, 30].

Нельзя не удивляться тому, что в оптической теории света и частиц оказывается возможным с исключительной точностью предсказывать громадное число явлений, исходя из представлений о распространении волн и совершенно не учитывая корпускулярную структуру, хотя передаваемая энергия, несомненно, дискретна. В случае явлений интерференции и дифракции для их объяснения достаточно воспользоваться постулатом Борна об их статистическом описании. Однако в обычной квантовой теории этот постулат принимается произвольно, тогда как я могу его обосновать. Постулат согласованности фаз дает объяснение там, где обычная теория, по-видимому, не может этого сделать, например когда рассматривается действие электромагнитной волны с частотой ν на колебательный контур или на другое аналогичное устройство, настроенное на эту частоту. Естественно думать, что некоторые из переносимых волной фотонов передают колебательному контуру свою энергию в форме коротких импульсов, компенсирующих затухание. Но энергия, подводимая таким путем к колебательному контуру, может поддерживать незатухающие

колебания лишь в том случае, если импульсы следуют с частотой, равной частоте колебаний в контуре и в волне. На мой взгляд, это доказывает, что падающие фотоны характеризуются некоторой частотой внутренних колебаний, совпадающей с частотой колебаний волны. Это и утверждает постулат согласованности фаз, тогда как обычная теория не дает возможности ввести никакой аналогичной идеи.

В заключение отмечу, что, на мой взгляд, мои первые идеи, к разработке которых я снова вернулся и затем развивал в последующие годы, дают возможность понять истинную природу сосуществования волн и частиц, которую обычная квантовая механика и ее обобщения объясняют лишь статистически, не вскрывая ее истинного содержания. В самом деле, постулат согласованности фаз показывает нам, что существует корпускулярная динамика, носящая характер динамики частиц с *переменной собственной массой*, и она лежит в основе любого распространения волн, даже если речь идет о выходе за пределы приближения геометрической оптики. Думаю, что именно в этом пункте обычная квантовая механика является несостоятельной.

Достигнув возраста, когда я не могу больше надеяться долго продолжать свои научные исследования, я хотел бы выразить надежду, что молодые ученые посвятят себя развитию в направлении, которое я наметил в последние годы, идей, из которых 50 лет тому назад во Франции родилась волновая механика.

Первая часть (1950—1951)

О соотношении неопределенностей Гейзенберга и о вероятностной интерпретации волновой механики

Глава I

Принципы волновой механики

1. КЛАССИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. ТЕОРИЯ ЯКОБИ

Прежде всего мы кратко сформулируем общие принципы волновой механики для случая одной частицы, на которую действует силовое поле, определяемое по известной потенциальной энергии $V(x, y, z, t)$. Начнем с того, что напомним некоторые основные положения классической динамики материальной точки.

Согласно классическим представлениям, частица в каждый момент занимает вполне определенное положение в пространстве. С течением времени она под влиянием силового поля описывает некоторую криволинейную траекторию. Следовательно, в каждый момент времени частице можно приписать три декартовы координаты x, y, z , характеризующие ее положение. Классические уравнения движения таковы:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{\partial V}{\partial x}, \quad (1)$$

где m — постоянный множитель, называемый массой частицы. Этими тремя дифференциальными уравнениями второго порядка полностью определяется изменение координат частицы со временем, т. е. ее движение, при условии, что заданы 6 произвольных постоянных — координаты и составляющие скорости в заданный (начальный) момент времени. Детерминизм классической механики состоит в том, что если заданы начальное положение и начальная скорость, то этим полностью определяются последующие состояния¹⁾.

По поводу общих теорем о движении материальной точки и об уравнениях Лагранжа и Гамильтона отсылаем читателя к курсам классической механики²⁾. Здесь мы ограничимся формулировкой основной теоремы Якоби, которая нам пригодится в последующем.

¹⁾ Всюду далее в примечаниях Луи де Бройля в конце пишется Л. Б. После примечаний Жоржа Лошака ставятся буквы Ж. Л. — *Прим. ред.*

²⁾ Среди многочисленных курсов укажем [9, 10]. Отметим, что Луи де Бройль формулирует теорему Якоби в пространстве R^3 не из соображений простоты, а потому, что оптико-механическая аналогия, согласно его представлениям, имеет физический смысл только в трехмерном физическом пространстве, вне которого эта аналогия носит формальный характер. — Ж. Л.

Теорема. Если удастся найти полный интеграл (т. е. решение, содержащее 3 произвольные неаддитивные постоянные) $S(x, y, z, t, \alpha, \beta, \gamma)$ для уравнения в частных производных (уравнения Якоби):

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + V(x, y, z, t) = \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (2)$$

то уравнениями

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = a, \quad \frac{\partial S}{\partial \beta} = b, \quad \frac{\partial S}{\partial \gamma} = c, \quad (3)$$

где a, b, c — три новые произвольные постоянные, определяется одно из возможных движений в силовом поле; что же касается составляющих импульса частицы, которая в момент времени t занимает положение, характеризуемое координатами x, y, z , то компоненты импульса даются выражениями

$$p_x = mv_x = -\frac{\partial S}{\partial x}, \quad p_y = mv_y = -\frac{\partial S}{\partial y}, \quad p_z = mv_z = -\frac{\partial S}{\partial z}. \quad (4)$$

Мы видим, что, согласно теореме Якоби, возможные движения частицы делятся на классы. Движения одного класса соответствуют полному интегралу $S(x, y, z, t, \alpha, \beta, \gamma)$ с заданными значениями постоянных α, β, γ . В каждом таком классе существует бесконечное множество возможных движений, характеризуемых значениями вторичных постоянных a, b, c .

Напомним также, что уравнение Якоби можно вывести, исходя из выражения для энергии, представленной в виде функции координат и импульсов:

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z, t) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z, t), \quad (5)$$

если заменить в нем p_x, p_y и p_z величинами $-\partial S/\partial x, -\partial S/\partial y$ и $-\partial S/\partial z$ и приравнять полученное выражение производной $\partial S/\partial t$.

Теорема Якоби принимает вид, который нам будет особенно полезен в случае, когда потенциальная энергия V не зависит от времени. Известно, что в этом случае справедлив закон сохранения энергии, т. е. в процессе движения сумма кинетической и потенциальной энергии $\frac{1}{2}mv^2 + V$ сохраняет постоянное значение E . Постоянная E играет роль одной из первичных постоянных движения, например постоянной γ . Положим

$$S(x, y, z, t, \alpha, \beta, E) = Et - S_1(x, y, z, \alpha, \beta, E), \quad (6)$$

где S_1 уже не зависит от времени, и найдем полный интеграл, зависящий от постоянной E и от двух произвольных постоянных α и β , для уравнения в частных производных (укороченного уравнения Якоби):

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial z} \right)^2 \right] + V(x, y, z) = E. \quad (7)$$

Теорема Якоби, примененная к этому частному случаю, показывает, что если найден такой полный интеграл, то движение, определяемое уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_1}{\partial \alpha} = a, \quad \frac{\partial S_1}{\partial \beta} = b, \\ \frac{\partial S}{\partial E} = t - \frac{\partial S_1}{\partial E} = c, \end{aligned} \quad (8)$$

где a, b, c — три произвольные постоянные, есть одно из возможных движений частицы в постоянном силовом поле и составляющие вектора импульса частицы после прихода в точку с координатами x, y, z таковы:

$$p_x = mv_x = \frac{\partial S_1}{\partial x}, \quad p_y = mv_y = \frac{\partial S_1}{\partial y}, \quad p_z = mv_z = \frac{\partial S_1}{\partial z}.$$

Возможные движения подразделяются на классы с разными значениями энергии и двух первичных постоянных α и β , причем каждый класс содержит бесконечно много движений, различающихся значениями трех вторичных постоянных a, b, c .

Двумя первыми уравнениями (8), не содержащими времени, определяется кривая в пространстве — траектория частицы. Третьим уравнением, которое можно написать в виде $\partial S_1 / \partial E = t - t_0$, описывается движение по траектории. Таким образом, можно видеть, что в случае постоянных полей траекторию можно исследовать независимо от исследования движения; в общем случае полей, зависящих от времени, это невозможно.

В случае постоянных полей справедлива еще одна важная теорема: Траектории одного класса, соответствующие одному и тому же полному интегралу $S_1(x, y, z, \alpha, \beta, E)$, ортогональны поверхностям $S_1 = \text{const}$. Это — прямое следствие уравнения $\mathbf{p} = \text{grad } S_1$, означающего, что скорость в любой точке пропорциональна градиенту действия S_1 .

Исходя из ортогональности траекторий поверхностям $S_1 = \text{const}$, можно вывести принцип наименьшего действия Мопертюи. Действительно, рассмотрим все поверхности $S_1 = \text{const}$, соответствующие бесконечно близким значениям постоянных, лежащим между c_1 и c_2 , и представим некоторые из этих поверхностей их следами на плоскости рисунка.

Пусть AEB — траектория класса, соответствующего функции S_1 , а AFB — кривая, бесконечно близкая к AEB . Если через dn обозначить элемент нормали к поверхности $S_1 = \text{const}$, то интеграл $\int (\partial S_1 / \partial n) ds$, взятый вдоль AEB , будет равен $c_2 - c_1$, так как в данном случае $ds = dn$. Возьмем тот же интеграл вдоль кривой AFB . Вклад в этот интеграл малого элемента, каковым является FG , либо больше, либо (в крайнем случае) равняется приращению S_1 при переходе от F к G . В самом деле, если отрезок FG нормален к поверхностям $S_1 = \text{const}$, проходящим через две близкие точки, то $FG = dn$ и

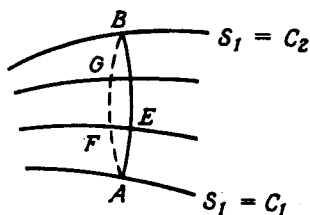


Рис. 1

$(\partial S_1 / \partial n) \overline{FG} = S_1(G) - S_1(F)$. Если же FG не является нормалью к поверхности $S_1 = \text{const}$, то $\overline{FG} > dn$ и $(\partial S_1 / \partial n) \overline{FG}$ больше, чем $S_1(G) - S_1(F)$. Но все элементы отрезка кривой AFB не могут быть нормальны к поверхностям $S_1 = \text{const}$, если только AFB не совпадает с траекторией AEB . Поэтому интеграл $\int_A^B (\partial S_1 / \partial n) ds$ будет больше вдоль AFB , чем вдоль AEB .

Из уравнения для S_1 имеем

$$\frac{\partial S_1}{\partial n} = \sqrt{\left(\frac{\partial S_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{2m[E - V(x, y, z)]}. \quad (9)$$

Таким образом, мы приходим к следующему выводу: траектория, проходящая через две точки A и B пространства, характеризуется тем, что интеграл $\int_A^B \sqrt{2m(E - V)} ds$ для этой траектории меньше, чем для любой соседней кривой. Это — принцип наименьшего действия Мопертюи.

(Проведенные рассуждения теряют силу, когда траектории имеют огибающую и когда траектория AEB касается этой огибающей между A и E . В этом случае интеграл Мопертюи может быть не минимальным, а максимальным, но он по-прежнему имеет экстремум.)

Все сказанное можно проиллюстрировать очень простым примером. Рассмотрим частицу, движущуюся в отсутствие поля. В этом случае $V = 0$, и с учетом закона сохранения энергии уравнение Якоби можно переписать в форме

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial z}\right)^2 \right] = E. \quad (10)$$

Полный интеграл получается, например, если положить

$$S_1 = \sqrt{2mE}(\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}z), \quad (11)$$

и по теореме Якоби имеем траектории

$$\frac{\partial S_1}{\partial \alpha} = \sqrt{2mE} \left(x - \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}} z \right) = a, \quad (12)$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial \beta} = \sqrt{2mE} \left(y - \frac{\beta}{\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}} z \right) = b.$$

Это прямые с направляющими косинусами α , β и $\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}$, ортогональные плоскостям $S_1 = \text{const}$. Движение по этим прямым описывается уравнением

$$\frac{\partial S_1}{\partial E} = \frac{m}{\sqrt{2mE}}(\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}z) = t - t_0. \quad (13)$$

Движение будет прямолинейным и равномерным со скоростью $v = \sqrt{2E/m}$. Наконец, как нетрудно убедиться, выполняются соотношения $p_x \equiv mv_x = m\alpha v = \sqrt{2mE} \alpha = \partial S_1 / \partial x, \dots$. Полным рассматриваемым интегралом определяется класс прямолинейных равномерных движений в направлении α , β , γ со скоростью $\sqrt{2E/m}$.

Таким же образом определяется класс прямолинейных и равномерных движений, исходящих из точки O с координатами x_0, y_0, z_0 . Для этого нужно рассмотреть полный интеграл уравнения для S :

$$S = -\frac{m}{2t}[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]. \quad (14)$$

2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Чтобы подготовиться к переходу к волновой механике, кратко остановимся на распространении монохроматических волн в изотропной среде, характеризуемой неким показателем преломления и обладающей дисперсией.

Допустим, что распространяющиеся волны описываются уравнением

$$\Delta\psi = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (15)$$

где ψ — волновая функция, а γ — некая функция положения x, y, z и частоты ν волны. Величина γ — это скорость распространения фазы, или просто скорость распространения волны. Запишем монохроматическую волну в комплексном виде

$$\psi = u(x, y, z)e^{2\pi i\nu t} \quad (16)$$

и положим

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{n(x, y, z, \nu)}{\gamma_0}.$$

Здесь γ_0 — скорость распространения в среде, для которой показатель преломления равен 1. Тогда уравнение (15) примет вид

$$\Delta\psi - \frac{4\pi^2 n^2 \nu^2}{\gamma_0^2} \psi = 0. \quad (17)$$

Строго говоря, распространение монохроматической волны в среде с дисперсией следует исследовать, находя решения этого уравнения, но на практике зачастую эта задача решается приближенным методом, лежащим в основе геометрической оптики.

Чтобы уяснить себе, в чем смысл этого приближения, рассмотрим сначала случай, когда показатель преломления не зависит от x, y, z (однородная среда). В этом случае точное решение уравнений получается в виде

$$\psi = a \exp \left\{ 2\pi i\nu \left[t - \frac{n(\nu)}{\gamma_0} (\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z) \right] \right\}. \quad (18)$$

Здесь a — постоянная, называемая амплитудой плоской волны. Назовем «фазой волны» линейную функцию

$$\varphi = \nu \left[t - \frac{n}{\gamma_0} (\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z) \right]. \quad (19)$$

Поверхности равной фазы $\varphi = \text{const}$, называемые также волновыми фронтами, представляют собой плоскости, перпендикулярные направлению, характеризуемому величинами $\alpha, \beta, \gamma = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}$. С течением времени значения фазы, а следовательно, и функции ψ распространяются в этом направлении со скоростью

$$\gamma = \gamma_0 / n(\nu). \quad (20)$$

В заданный момент времени функция ψ принимает одно и то же значение на плоскостях равной фазы, разделенных расстоянием

$$\lambda = \frac{\mathcal{V}_0}{n\nu} = \frac{\mathcal{V}}{\nu}, \quad (21)$$

которое называется длиной волны, а в одной и той же точке одни и те же значения функции ψ повторяются через интервалы времени, равные периоду $T = 1/\nu$.

Рассмотрим теперь среду с показателем преломления n , меняющимся от одной точки к другой. Монохроматическую волну всегда можно записать в виде

$$\psi = a(x, y, z)\exp\{2\pi i[\nu t - \varphi_1(x, y, z)]\}, \quad (22)$$

где a и φ_1 — действительные функции. Длину волны всегда можно определить как $\lambda = \mathcal{V}_0/n\nu$, но эта величина «локальна» в том смысле, что она меняется при переходе от одной точки к другой. Если в некоторой области пространства показатель преломления мало меняется на расстоянии порядка длины волны, то производными функции a можно пренебречь по сравнению с производными функции φ_1 . Поэтому, подставив выражение (22) в волновое уравнение, получим приближенное уравнение, которое называется «уравнением геометрической оптики»:

$$\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)^2 = \frac{\nu^2 n^2(x, y, z)}{\mathcal{V}_0^2}. \quad (23)$$

Это уравнение дает возможность находить изменения фазы, не учитывая медленного изменения амплитуды a .

Пусть $\varphi_1(x, y, z, \nu, \alpha, \beta)$ — полный интеграл уравнения геометрической оптики. Приближенным решением уравнения распространения будет функция

$$\psi = a \exp\{2\pi i[\nu t - \varphi_1(x, y, z, \nu, \alpha, \beta)]\},$$

где a — медленно меняющаяся функция. Кривые, ортогональные к поверхностям $\varphi_1 = \text{const}$, называются «лучами» волны. Подобно тому как выше был обоснован принцип наименьшего действия Мопертюи для траекторий, нормальных к поверхностям $S_1 = \text{const}$, мы здесь можем доказать принцип Ферма: если кривая C есть луч распространения волны, проходящей через точки A и B пространства, то интеграл

$$\int_A^B \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} ds = \int_A^B \frac{n\nu}{\mathcal{V}_0} ds,$$

взятый вдоль луча C , будет меньше того же интеграла, взятого вдоль любой другой кривой, бесконечно близкой к C и соединяющей точки A и B .

Геометрическая оптика есть всего лишь приближение, допустимое только в том случае, когда показатель преломления n мало меняется на расстояниях порядка длины волны. Если длина волны стремится к нулю, то это приближение становится все более точным.

Отметим, что в уравнение распространения (17) входит частота ν . Но кроме случая монохроматической волны возможен более общий случай суперпозиции монохроматических волн, каждая из которых удовлетворяет волновому уравнению со значением n , соответствующем ее частоте. Желательно иметь такую форму уравнения распространения, куда частота не входит и из которого волновая функция находилась бы даже в том случае, когда она образована путем суперпозиции монохроматических волн.

Предположим в качестве примера, что показатель преломления определяется уравнением дисперсии

$$n(x, y, z, \nu) = \sqrt{1 - \frac{F(x, y, z) \nu_0^2}{4\pi^2 \nu^2}},$$

где F — некоторая функция положения. Тогда в качестве общего уравнения распространения можно взять уравнение

$$\Delta\psi - \frac{1}{\nu_0^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = F(x, y, z)\psi,$$

поскольку в случае монохроматической волны $\partial^2 \psi / \partial t^2 = -4\pi^2 \nu^2 \psi$ и мы снова получаем уравнение (17). С положением такого рода мы встретимся в волновой механике¹⁾.

3. ПЕРЕХОД ОТ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ К ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКЕ

Весьма полная формальная аналогия между теорией Якоби и волновой теорией, обнаруженная Гамильтоном более 100 лет назад, приводит нас к синтезу, осуществляемому в волновой механике.

Начнем с того, что сравним движение частицы в отсутствие поля ($V = 0$) с распространением волны в однородной среде с показателем преломления n , не зависящим от x, y, z . Для частицы в отсутствие поля мы нашли [формула (11)]

$$S_1 = \sqrt{2mE}(\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z) = mv(\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z).$$

В то же время для монохроматической волны в однородной среде с учетом постоянства длины волны λ мы можем написать уравнение геометрической

¹⁾ По вопросам, связанным с геометрической оптикой, отсылаем читателя к работам автора [1, 27, 29]. — Ж. Л.

оптики в форме

$$\varphi_1 = \frac{1}{\lambda} (\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z). \quad (24)$$

Если направление движения частицы совпадает с направлением распространения волны, то полные функции S и φ имеют вид

$$\begin{aligned} S &= Et - mv(\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z), \\ \varphi &= vt - \frac{1}{\lambda} (\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z). \end{aligned} \quad (25)$$

В квантовой теории принимается, что $E = h\nu$, т. е. с движением частицы, энергия которой равна E , связывается распространение волны, характеризуемой частотой $\nu = E/h^1$. Это дает нам основание положить

$$\varphi = \frac{S}{h}. \quad (26)$$

Если мы примем такую гипотезу, то получим две формулы:

$$E = h\nu, \quad \lambda = \frac{h}{mv}. \quad (27)$$

Иными словами, частице, движущейся прямолинейно и равномерно с энергией E и импульсом mv , мы можем сопоставить распространяющуюся в том же направлении плоскую монохроматическую волну с частотой E/h и длиной волны h/mv , т. е. волну вида

$$\psi = ae^{\frac{2\pi i}{h} S} \quad (a \text{ — постоянная}),$$

где S — величина, указанная выше.

Рассмотренное соответствие между волной и движущейся частицей обобщается на случай движения частицы в постоянном поле, определяемом потенциальной энергией $V(x, y, z)$. В этом случае движению частицы сопоставляется распространение волны в неоднородной среде, показатель преломления n которой, а следовательно и длина волны λ меняются при переходе от одной точки к другой.

В этом случае выражения для функции Якоби S и фазы φ принимают вид

$$\begin{aligned} S &= Et - S_1(x, y, z), \\ \varphi &= vt - \varphi_1(x, y, z), \end{aligned} \quad (28)$$

¹⁾ В то время, когда писалась данная книга, Луи де Бройль под сильным влиянием научного окружения отказался от последовательно релятивистского подхода, выдержанного в его диссертации, к которому он вернется позднее. В действительности только теория относительности, фиксирующая константу энергии, фиксирует величину ν , чего он не указывает, хотя придавал этому значение фундаментальной важности. — Ж. Л.

где S_1 и φ_1 — полные интегралы уравнений

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial z}\right)^2 = 2m[E - V(x, y, z)],$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2(x, y, z)}.$$
(29)

Здесь очень естественно принять в качестве гипотезы соотношение $\varphi = S/h$ и, следовательно, положить $E = h\nu$, $S_1 = h\varphi_1$. Тогда из второго уравнения (29) следует, что

$$\lambda = \frac{1}{|\text{grad } \varphi_1|} = \frac{h}{|\text{grad } S_1|} = \frac{h}{\sqrt{2m(E - V(x, y, z))}},$$
(30)

и поскольку в каждой точке должно выполняться равенство $E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x, y, z)$, то по-прежнему выполняется соотношение

$$\lambda = \frac{h}{mv},$$

но только здесь v и λ меняются при переходе от одной точки к другой.

Каким же должно быть уравнение распространения волны, соответствующее движению в не зависящем от времени поле? Перепишем уравнение (17) в виде

$$\Delta\psi + \frac{4\pi^2}{\lambda^2(x, y, z)}\psi = 0$$
(31)

и подставим в него выражение для λ ; получим уравнение

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}[E - V(x, y, z)]\psi = 0.$$
(32)

При $V = 0$ оно переходит в уравнение, справедливое в отсутствие поля.

Всегда, когда при описании распространения волны ψ допустимо приближение геометрической оптики, мы можем положить

$$\psi = a \exp\left(\frac{2\pi i}{h} S\right) = a \exp\left\{\frac{2\pi i}{h}[Et - S_1(x, y, z)]\right\}.$$

Траектории, предсказываемые классической динамикой материальной точки, ортогональные к поверхностям $S_1 = \text{const}$, будут теперь не чем иным, как лучами волны ψ , ортогональными к поверхностям $\varphi_1 = \text{const}$.

Таким путем мы приходим к одной из основных идей новой механики. Если в классической механике ее основные уравнения считались точными, спра-

ведливыми во всех случаях, то новая механика приписывает существенную роль волне ψ ; теперь классическая механика рассматривается как приближение, справедливое лишь в том случае, когда при описании распространения волны ψ допустимо приближение геометрической оптики.

Таким образом, классическая механика оказывается лишь неким приближением; она применима только в том случае, когда показатель преломления n для волны ψ мало меняется на расстояниях порядка длины волны или, что то же самое, когда на таких расстояниях мало меняется потенциал. Если бы длина волны, характеризующая волновую функцию ψ , была бесконечно мала, то классическая динамика была бы точной теорией. Из формулы (27) для длины волны λ мы видим, что это условие всегда будет выполняться (при нулевом значении v), если постоянная h бесконечно мала; при $h \rightarrow 0$ мы всегда должны получать в пределе классическую механику.

4. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКИ ДЛЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Мы пришли к тому, что классические уравнения динамики материальной точки в поле, не зависящем от времени, нужно заменить уравнением распространения монохроматической волны. Но, как мы скоро увидим, зачастую нам придется иметь дело с пакетами волн ψ , составленными (по принципу суперпозиции) из монохроматических волн. Поэтому целесообразно попытаться получить уравнение распространения, которому удовлетворяла бы функция ψ , соответствующая такой суперпозиции монохроматических волн. Уравнение¹⁾

$$\Delta\psi - \frac{8\pi^2m}{h^2}V(x, y, z)\psi = \frac{4\pi im}{h} \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (33)$$

удовлетворяет этому условию, поскольку в случае плоской монохроматической волны с частотой E/h оно сводится к уравнению (32). Но такая новая форма уравнения позволяет нам не ограничиваться плоскими монохроматическими волнами, а рассматривать их суперпозицию. Более того, эта форма подсаживает способ обобщения новой механики на случай полей, меняющихся с течением времени. В самом деле, так как теперь можно не ограничиваться монохроматическими волнами, время уже не играет выделенной роли, а потому теперь естественно допустить, что форма уравнения не изменится, если V зависит от времени; таким образом, в качестве общего волнового уравнения волновой релятивистской механики для отдельной частицы можно написать уравнение

$$\Delta\psi - \frac{8\pi^2m}{h^2}V(x, y, z, t)\psi = \frac{4\pi im}{h} \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (34)$$

¹⁾ Автор, как правило, рассматривает уравнение, комплексно сопряженное к обычно используемому. — Ж. Л.

5. АВТОМАТИЧЕСКИЙ ВЫВОД ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Укажем формальный прием, дающий возможность автоматически находить волновые уравнения. В классической механике функцией Гамильтона называется энергия, представленная как функция координат и обобщенных импульсов Лагранжа. В прямоугольной системе координат эта функция, как хорошо известно, имеет вид

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z, t) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z, t). \quad (35)$$

Если здесь произвести замену $p_x \rightarrow -(\hbar/2\pi i)(\partial/\partial x)$, $p_y \rightarrow -(\hbar/2\pi i)(\partial/\partial y)$, $p_z \rightarrow -(\hbar/2\pi i)(\partial/\partial z)$, то мы получим так называемый оператор Гамильтона

$$\begin{aligned} H\left(x, y, z, -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z}, t\right) = \\ = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{2\pi i}\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + V(x, y, z, t). \end{aligned} \quad (36)$$

Действуя этим оператором на функцию ψ (т. е. умножая ψ слева на оператор Гамильтона) и приравнявая результат величине $(\hbar/2\pi i)(\partial\psi/\partial t)$, получаем

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{2\pi i}\right)^2 \Delta\psi + V(x, y, z, t)\psi = \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad (37)$$

т. е. общее уравнение, выведенное выше.

Итак, мы видим, что общее уравнение распространения можно записать в форме

$$H(x, y, z, P_x, P_y, P_z, t)\psi = \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad (38)$$

где P_x, P_y, P_z — операторы:

$$P_x = -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad P_y = -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y}, \quad P_z = -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z},$$

которые мы сопоставляем с компонентами импульса.

Отметим, что способ автоматического вывода волновых уравнений, указанный выше, пригоден лишь в том случае, когда используется прямоугольная система координат. В сферических же, например, координатах при таком способе не получается правильного выражения для оператора Лапласа, входящего в уравнение. Дело в том, что в этом случае, исходя из классической функции Гамильтона, невозможно получить однозначное выражение для оператора Гамильтона, поскольку, например, член вида qp_q в классической функции может в зависимости от порядка множителей приводить к членам

$$qP_q, P_qq, \frac{P_qq + qP_q}{2}, \dots,$$

которые не эквивалентны друг другу.

Глава II

Вероятностная интерпретация волновой механики

1. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ВОЛНЫ ψ

Мы получили общие уравнения волновой механики. Теперь нам необходимо научиться их применять и, в частности, выяснить, каков смысл функции ψ .

Если руководствоваться классическими аналогиями, то функцию ψ можно было бы рассматривать как физическую величину, характеризующую колебания какой-то среды. Но есть одно обстоятельство, указывающее на то, что такая интерпретация невозможна. Поскольку в коэффициенты общего уравнения входит величина $i = \sqrt{-1}$, волновую функцию следует считать существенно комплексной величиной, в противоположность тому, с чем мы встречались в классической теории волн и колебаний, где применение комплексных функций всегда является лишь простым математическим приемом.

В квантовой механике волновая функция выступает не как физическая величина, а как некий «инструмент предвидения», пользуясь которым можно вычислять вероятность того, что результат измерения будет тем или иным¹⁾. Функция ψ комплексная, но, как мы увидим, из нее можно построить действительные величины, имеющие физический смысл вероятностей. Тем, что функция ψ существенно связана с вероятностями, объясняется, почему, как мы увидим, ее значение никогда полностью не определено; в выражение для этой функции всегда входит фазовый множитель $e^{i\alpha}$, который выпадает при образовании действительных величин, имеющих смысл вероятностей, и который, следовательно, не существует; следовательно, модуль функции ψ определяется лишь с точностью до постоянного множителя, и этой неопределенностью, как мы увидим, пользуются для того, чтобы «нормировать» волновую функцию,

¹⁾ Весь этот раздел автор в более позднее время написал бы с гораздо большей осторожностью. То, что он здесь говорит, относится лишь к непрерывной и нормированной волновой функции Шредингера, но автор далее возвращается к идее двойного решения, которая состоит в том, что с каждым непрерывным решением, несущим вероятностный смысл, должно быть связано сингулярное решение с точно такой же фазой, амплитуда которого, однако, существенно отлична от нуля лишь в сингулярной области, соответствующей частице. Эта сингулярная волна рассматривается как физическая волна, описывающая одновременное совместное существование волны и частицы. — Ж. Л.

после чего становится возможным выражать через нее абсолютные вероятности. Все это было бы непонятно, если бы функция ψ описывала реальные физические колебания, так как тогда ее амплитуда и фаза были бы вполне определенными. Некоторые свойства функции ψ мы рассмотрим в дальнейшем.

2. ПРИНЦИП ИНТЕРФЕРЕНЦИИ

О том, как пользоваться тем, что известна функция ψ , нам говорит первый принцип волновой механики, который мы будем называть принципом интерференции или принципом локализации. Формулируется он следующим образом:

квадрат модуля функции ψ в любой точке пространства в любой момент времени пропорционален вероятности того, что при наблюдении в данной точке в данный момент времени будет обнаружена частица.

Функция ψ как комплексная величина может быть записана в виде $\psi = ae^{i\varphi}$, где a и φ — модуль и фаза, причем это действительные величины в общем случае функции переменных x, y, z, t . Обозначим через ψ^* величину $ae^{-i\varphi}$, комплексно сопряженную к ψ . Тогда

$$a^2 = \psi\psi^* = |\psi|^2. \quad (1)$$

Об этой действительной величине и говорится в принципе интерференции.

Принцип интерференции нетрудно связать с классическими представлениями теории света. Во всех теориях света принимается, что в любой точке в любой момент времени интенсивность волны пропорциональна переносимой ею энергии; это предположение дает возможность строго предсказывать явления интерференции. Но ныне мы знаем, что при энергетическом обмене между веществом и светом все происходит так, как если бы свет состоял из частиц с энергией $h\nu$. Эти частицы — «фотоны». Если мы предположим, что световая волна несет большое число фотонов, то для объяснения интерференции нужно потребовать, чтобы интенсивность волны в каждой точке была пропорциональна плотности фотонов. Но такая «статистическая» интерпретация не совсем удовлетворительна и требует замены «вероятностной» интерпретацией. Дело в том, что можно наблюдать (опыты Тейлора, Демпстера и Бато) явление интерференции обычного типа, если даже в течение длительного времени регистрировать свет очень слабой интенсивности, настолько слабой, что в интерференционном приборе в любой момент не может быть более одного фотона. К тому же, как мы увидим, частице невозможно приписывать вполне определенное пространственное положение. Таким образом, напрашивается следующий вывод: интенсивность световой волны пропорциональна вероятности того, что один фотон произведет в данной точке пространства эффект, который можно было бы наблюдать. Стало быть, даже в случае очень слабой интенсивности мы получим типичное явление интерференции.

Обобщение принципа интерференции света на материальные частицы основано на том факте, что в случае материальных частиц тоже наблюдаются явления интерференции и дифракции, как и в случае света. Если взять, напри-

мер, электроны (с энергией от нескольких десятков до нескольких сотен тысяч электронвольт), а их легко можно использовать в опытных установках, то связываемая с ними длина волны $\lambda = h/mv$ по порядку величины равна $10^{-8} - 10^{-9}$ см. Поэтому с электронами можно получить дифракционные картины, похожие на картины дифракции рентгеновских лучей с длиной волны того же порядка величины. Это было установлено в 1929 г. в знаменитых опытах Дэвиссона и Джермера, которые вскоре были повторены Томсоном, Раппом, Понтом, Кикучи и др.¹⁾ Эти опыты доказывают, что пучок электронов с определенной энергией может, дифрагируя на кристалле, давать картины, аналогичные тем, которые наблюдаются в случае рентгеновских лучей (опыты Лауз — Брэгга). Раппу удалось даже получить картину дифракции электронов с обычной дифракционной решеткой при очень большом угле падения, а Берш²⁾ в 1942 г., повторяя фундаментальный опыт Френеля, относившийся к свету, получил картину дифракции электронов на крае экрана. Все эти опыты превосходно подтверждают общие представления волновой механики и, в частности, формулу $\lambda = h/mv$; они также убедительно подтверждают возможность перенесения на материальные частицы принципа интерференции, поскольку именно этот принцип лежит в основе интерпретации явлений интерференции и дифракции.

3. ТОЧНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ПРИНЦИПА ИНТЕРФЕРЕНЦИИ. ЖИДКОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ

Чтобы уточнить формулировку принципа интерференции, заметим, что волна ψ , которая является решением уравнения в частных производных и которая не является измеримой физической величиной, определяется лишь с точностью до постоянного множителя, который может быть комплексным. Этот постоянный множитель мы можем выбрать таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$\int \int \int \psi \psi^* d\tau = 1, \quad (2)$$

где интеграл берется по всему пространству. Выбирая произвольный множитель в соответствии с равенством (2), мы «нормируем» функцию в данный момент t_0 , и, как мы сейчас покажем, тогда функция ψ будет оставаться нормированной в любой момент t . Принцип интерференции получает следующую уточненную формулировку: вероятность обнаружить частицу с нормированной волновой функцией $\psi(x, y, z, t)$ в элементе объема $d\tau$ в момент t равна

$$\psi(x, y, z, t)\psi^*(x, y, z, t)d\tau = |\psi(x, y, z, t)|^2 d\tau.$$

¹⁾ См. [11 — 14]. — Л. Б.

²⁾ См. [15]. — Л. Б.

Чтобы наглядно представить себе, как изменяется с течением времени плотность вероятности $|\psi|^2$, мы введем воображаемую жидкость¹⁾, плотность которой в любой точке и в любой момент времени дается формулой

$$\rho(x, y, z, t) = \psi(x, y, z, t)\psi^*(x, y, z, t). \quad (3)$$

Движение этой жидкости зададим, приняв для скорости \mathbf{v} в точке x, y, z в момент t выражение

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\psi\psi^*} \frac{h}{4\pi im} (\psi \text{ grad } \psi^* - \psi^* \text{ grad } \psi) = -\frac{h}{2\pi m} \text{ grad } \varphi. \quad (4)$$

Функции ψ и ψ^* удовлетворяют комплексно сопряженным уравнениям

$$\Delta\psi - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V(x, y, z, t)\psi = \frac{4\pi im}{h} \frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad (5)$$

$$\Delta\psi^* - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V(x, y, z, t)\psi^* = -\frac{4\pi im}{h} \frac{\partial\psi^*}{\partial t}.$$

Отсюда легко получим

$$\psi^*\Delta\psi - \psi\Delta\psi^* = \frac{4\pi im}{h} \frac{\partial}{\partial t} (\psi\psi^*) = \frac{4\pi im}{h} \frac{\partial\rho}{\partial t}, \quad (6)$$

что можно записать в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{h}{4\pi im} (\psi^*\Delta\psi - \psi\Delta\psi^*) = -\frac{h}{4\pi im} \times \sum_{x, y, z} \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi \frac{\partial\psi^*}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) \quad (7)$$

или

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\mathbf{v}) = 0. \quad (8)$$

В этом уравнении, хорошо известном в гидродинамике под названием уравнения непрерывности, выражается то обстоятельство, что для фиктивной жидкости с плотностью ρ выполняется закон сохранения, т. е. что интеграл

$$\iiint |\psi|^2 d\tau$$

¹⁾ Эта жидкость называется жидкостью Маделунг. В дальнейшем она будет играть важную роль в причинной интерпретации волновой механики. — Ж. Л.

постоянен. Поэтому нормировка функции ψ не меняется во все моменты времени.

4. СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ГЕЙЗЕНБЕРГА

В классической механике предполагалось, что в любой момент времени частице можно приписать вполне определенные положение и скорость; другими словами, в любой момент времени с частицей можно сопоставить ее координаты x, y, z , ее энергию E и импульс $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Как мы сейчас увидим, в волновой механике это невозможно.

Рассмотрим простой случай равномерного прямолинейного движения в отсутствие поля. Мы знаем, что равномерному и прямолинейному движению с энергией E и с импульсом \mathbf{p} в направлении с направляющими косинусами α, β и $\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}$ соответствует плоская монохроматическая волна

$$\psi = a \exp \left\{ \frac{2\pi i}{h} [Et - \sqrt{2mE}(\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}z)] \right\} \quad (9)$$

с частотой E/h и длиной волны h/mv . Эта монохроматическая волна, соответствующая вполне определенному состоянию движения, не дает никаких указаний на положение частицы, поскольку она однородна, т. е. амплитуда одинакова во всем пространстве. Значит, вероятность нахождения $\psi\psi^*$ одинакова во всех точках пространства.

Но решение ψ волнового уравнения, соответствующее состоянию частицы, может быть не плоской монохроматической волной, а суперпозицией плоских монохроматических волн, образующих волновой пакет конечных размеров. Тогда интенсивность $\psi\psi^*$ будет отлична от нуля лишь в ограниченной области пространства и частицу, согласно принципу интерференции, можно будет обнаружить лишь в этой области. Таким образом, неопределенность положения будет меньше, чем в случае плоской монохроматической волны. Вместе с тем если каждой монохроматической составляющей с частотой ν и длиной волны λ мы сопоставим состояние движения, характеризующееся энергией E и импульсом p ,

$$E = h\nu, p_x = \alpha(h/\lambda), p_y = \beta(h/\lambda), p_z = \gamma(h/\lambda), \quad (10)$$

то тогда мы не сможем приписать вполне определенные значения этих величин частице. Таким образом, переходя от плоской монохроматической волны к волновому пакету, мы уменьшаем неопределенность положения, но увеличиваем неопределенность энергии и импульса. Мы можем взять предельный случай волнового пакета бесконечно малых размеров. Такой волновой пакет аналитически можно представить как суперпозицию монохроматических волн со всевозможными частотами, со всевозможными длинами волн и со всевозможными направлениями распространения. Такой предельный случай, симметричный случаю плоской монохроматической волны, соответствует полной локализации частицы, но одновременно полной неопределенности ее движения.

Итак, чем точнее определяется положение частицы, тем больше неопределенность в ее движении, и наоборот. Это — первая, качественная формулировка соотношения неопределенностей Гейзенберга, которую мы сейчас уточним.

Посмотрим теперь, как волна ψ представляется в виде суперпозиции плоских монохроматических волн. Введем обозначения

$$\nu = \frac{E}{h}, \quad \mu_x = \frac{p_x}{h} = \frac{\alpha}{h} \sqrt{2mE}, \quad \mu_y = \frac{p_y}{h} \frac{\beta}{h} \sqrt{2mE},$$

$$\mu_z = \frac{p_z}{h} \frac{\gamma}{h} \sqrt{2mE}. \quad (11)$$

Соответствующую плоскую монохроматическую волну можно записать в виде

$$a \exp[2\pi i(\nu t - \mu_x x - \mu_y y - \mu_z z)]. \quad (12)$$

Волну ψ можно представить в виде интеграла Фурье:

$$\psi(x, y, z, t) = \iiint a(\mu_x, \mu_y, \mu_z) \exp[2\pi i(\nu t - \mu_x x - \mu_y y - \mu_z z)] d\mu_x d\mu_y d\mu_z, \quad (13)$$

где следует положить

$$\nu = \frac{E}{h} = \frac{h}{2m} (\mu_x^2 + \mu_y^2 + \mu_z^2). \quad (14)$$

Коэффициенты $a(\mu_x, \mu_y, \mu_z)$ в общем случае являются комплексными, т. е. они содержат множители вида $e^{i\alpha}$, поскольку фазы различных монохроматических составляющих в разложении функции ψ не одинаковы.

Рассмотрим теперь волновой пакет ψ в какой-либо момент времени, который мы примем за начальный момент $t = 0$. Функция

$$\psi(x, y, z, 0) = \iiint_{-\infty}^{\infty} a(\mu_x, \mu_y, \mu_z) \exp[-2\pi i(\mu_x x + \mu_y y + \mu_z z)] d\mu_x d\mu_y d\mu_z \quad (15)$$

должна отличаться от нуля лишь в ограниченной области R . Обозначим символами Δx , Δy , Δz максимально возможные изменения координат частиц в области R , т. е. длины ребер прямоугольного параллелепипеда, в который вписана область R . Начало координат мы можем выбрать в одной из вершин параллелепипеда, так что x , y , z в области R изменяются в интервалах $(0, \Delta x)$, $(0, \Delta y)$, $(0, \Delta z)$.

Из теории интегралов Фурье следует соотношение

$$a(\mu_x, \mu_y, \mu_z) = \iiint_R \psi(x, y, z, 0) \exp[2\pi i(\mu_x x + \mu_y y + \mu_z z)] dx dy dz. \quad (16)$$

Поскольку все a не могут быть бесконечно малыми, имеется по крайней мере один набор величин μ , которые мы обозначим через $\mu_x^0, \mu_y^0, \mu_z^0$, такой, что $a(\mu_x^0, \mu_y^0, \mu_z^0)$ будет заметно отличаться от нуля. Изменим μ_x, μ_y, μ_z на $\delta\mu_x, \delta\mu_y, \delta\mu_z$ относительно $\mu_x^0, \mu_y^0, \mu_z^0$, причем изменения необязательно должны быть бесконечно малыми. Получим

$$\begin{aligned}
 & a(\mu_x^0 + \delta\mu_x, \mu_y^0 + \delta\mu_y, \mu_z^0 + \delta\mu_z) - a(\mu_x^0, \mu_y^0, \mu_z^0) = \\
 & = \int_0^{\Delta x} dx \int_0^{\Delta y} dy \int_0^{\Delta z} dz \psi(x, y, z, 0) \{ \exp [2\pi i (\delta\mu_x x + \delta\mu_y y + \delta\mu_z z)] - 1 \} \times \\
 & \quad \times \exp [2\pi i (\mu_x^0 x + \mu_y^0 y + \mu_z^0 z)] dx dy dz.
 \end{aligned}$$

Экспонента в скобках может заметно отличаться от 1 лишь в том случае, если хотя бы одно из произведений $\delta\mu_x \Delta x, \delta\mu_y \Delta y, \delta\mu_z \Delta z$ больше отношения η , которое не может быть намного меньшим единицы. Поэтому если одновременно выполняются соотношения $\delta\mu_x \Delta x \leq \eta, \delta\mu_y \Delta y \leq \eta, \delta\mu_z \Delta z \leq \eta$, то величина $a(\mu_x^0 + \delta\mu_x, \mu_y^0 + \delta\mu_y, \mu_z^0 + \delta\mu_z)$ будет мало отличаться от $a(\mu_x^0, \mu_y^0, \mu_z^0)$ и, следовательно, согласно нашему предположению, будет достаточно большой. Стало быть, можно сказать, что размеры области изменения трех параметров μ_x, μ_y, μ_z для волнового пакета ψ в представлении Фурье будут характеризоваться тремя величинами $\Delta\mu_x, \Delta\mu_y, \Delta\mu_z$, удовлетворяющими неравенствам $\Delta\mu_x \Delta x \geq \eta, \Delta\mu_y \Delta y \geq \eta, \Delta\mu_z \Delta z \geq \eta$, откуда по определению величин μ_x, μ_y и μ_z имеем

$$\Delta p_x \Delta x \geq h, \quad \Delta p_y \Delta y \geq h, \quad \Delta p_z \Delta z \geq h, \quad (17)$$

где неравенства следует понимать как неравенства по порядку величины. Таким образом, мы получили неравенства, которые называются соотношениями неопределенностей Гейзенберга. Они показывают, что произведение неопределенности в координате на неопределенность в сопряженной компоненте импульса по порядку величины всегда равно h .

5. ПРИНЦИП СПЕКТРАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ (БОРН)

В предыдущих рассуждениях подразумевалось, что справедлив принцип, который мы теперь сформулируем в явном виде. Этот принцип, который пришлось добавить при дальнейшем развитии волновой механики, был впервые сформулирован Борном и может быть выражен следующим образом: *если волна ψ представляет собой суперпозицию какого-то числа плоских монохроматических волн, то каждая из составляющих соответствует одному из возможных состояний частицы, так что путем наблюдения или измерения можно обнаружить частицу в этом состоянии.* Более точная формулировка,

принадлежащая Борну, такова: если волна ψ представляет собой суперпозицию плоских монохроматических волн, соответствующих дискретному спектру, т. е.

$$\psi = \sum_{\alpha, \beta, E} a(\alpha, \beta, E) \exp \left\{ \frac{2\pi i}{h} [Et - \sqrt{2mE}(\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z)] \right\}, \quad (18)$$

то вероятность обнаружить при измерении частицу, движущуюся с энергией E в направлении с направляющими косинусами $\alpha, \beta, \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}$, равна $a(\alpha, \beta, E)a^*(\alpha, \beta, E) = |a(\alpha, \beta, E)|^2$.

Если же волна ψ представляет собой суперпозицию плоских волн, соответствующих непрерывному спектру (как это и бывает в случае обычных волновых пакетов), т. е.

$$\psi = \iiint a(\alpha, \beta, E) \exp \left\{ \frac{2\pi i}{h} [Et - \sqrt{2mE}(\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z)] \right\} d\alpha d\beta dE, \quad (19)$$

то вероятность обнаружить при измерении частицу, движущуюся с энергией в пределах от E до $E + \Delta E$ в направлении, соответствующем интервалам $(\alpha, \alpha + \Delta\alpha)$ и $(\beta, \beta + \Delta\beta)$, равна

$$\int_{\Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta E} |a(\alpha, \beta, E)|^2 d\alpha d\beta dE.$$

Таким образом, можно сказать, что вероятность каждого из состояний пропорциональна интенсивности и соответствующей спектральной составляющей. Что же касается состояний, не входящих в разложение Фурье волновой функции, то их вероятность, стало быть, равна нулю. Именно с этим, как мы увидим, связано квантование состояний в волновой механике.

Принцип спектрального разложения мы сформулировали лишь в простом случае отсутствия внешнего поля. Вскоре мы познакомимся с более общим принципом, применимым во всех случаях, а именно с обобщенным принципом спектрального разложения, из которого в частных случаях получаются принцип Борна и даже принцип интерференции.

6. НОВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ИЗЛОЖЕННЫМИ ПРИНЦИПАМИ

Рассмотренные принципы дают нам возможность уточнить смысл волны ψ и связать с ней совершенно новые представления.

Волна ψ не есть физическая величина в классическом смысле слова; она

представляет собой лишь некий инструмент предсказания¹⁾. Вид этой функции определяется данными предшествующих наблюдений за состоянием частицы и ее изменением во времени с момента последних наблюдений, которое описывается волновым уравнением. Хотя изменение волны ψ во времени является вполне определенным, это, как мы увидим, не дает возможности точно предсказывать результаты последующих наблюдений: зная волну ψ , мы не можем сказать, какое значение той или иной величины дадут измерения; мы можем сказать лишь, какие возможные значения и каковы их вероятности.

Каждый раз, когда новые наблюдения дают нам новые сведения о состоянии частицы, форму волны ψ приходится изменить. Это и понятно, ибо волна ψ есть лишь представление того, что нам фактически известно о состоянии частицы, но не представление объективной реальности.

Мы увидим, что наблюдения, проводимые одновременно в ходе одного и того же эксперимента, никогда не позволят нам узнать величины, связанные с частицей, точнее, нежели это допускается соотношениями неопределенностей Гейзенберга. Часть (можно даже сказать половина) величин, характеризующих частицу, в любой момент времени имеет некую неопределенность. Если мы точно измерим значения одних величин, то значения других, канонически сопряженных, останутся полностью неизвестными. Поэтому можно говорить о неких «максимальных» измерениях, которые могут дать нам максимум возможных сведений о состоянии частицы, не позволяя, однако, узнать его полностью. Если бы были возможны опыты, позволяющие точно узнать все сопоставляемые с частицей величины, то соотношения неопределенностей Гейзенберга, очевидно, больше не выполнялись бы, а из предыдущих рассуждений следует, что после подобного рода опытов мы не могли бы больше характеризовать состояние наших знаний волной ψ . Однако мы увидим, что никакой опыт подобного рода невозможен вследствие существования кванта действия. В дальнейшем мы уточним приведенные соображения и разберем их более детально.

7. ПЕРЕХОД ОТ ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКИ К КЛАССИЧЕСКОЙ. ТЕОРЕМА ЭРЕНФЕСТА, ГРУППОВАЯ СКОРОСТЬ

Теперь мы покажем, как с точки зрения волновой механики можно объяснить успех классической механики в макроскопической области. При этом можно исходить из теоремы Эренфеста, которую мы сейчас сформулируем ниже.

Рассмотрим снова жидкость вероятности с плотностью $\rho = |\psi|^2$. Волновой пакет занимает конечную область R в трехмерном пространстве, и можно определить его «центр тяжести» следующими интуитивно очевидными фор-

¹⁾ Именно поэтому в 1927 г. Луи де Бройль выдвинул гипотезу, к которой он вернулся через год после написания данной книги. Гипотеза состоит в том, что должны существовать два решения уравнения Шредингера, взаимосвязанные, но не идентичные: одно физическое, а другое — статистическое. — Ж. Л.

мулами:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \iiint_R \rho x \, d\tau \equiv \iiint_R x |\psi|^2 d\tau, \\ \bar{y} &= \iiint_R y |\psi|^2 d\tau, \\ \bar{z} &= \iiint_R z |\psi|^2 d\tau.\end{aligned}\tag{20}$$

В более общем случае средним значением функции $f(x, y, z)$ в жидкости вероятности назовем величину

$$\bar{f} = \iiint_R f(x, y, z) |\psi|^2 d\tau.\tag{21}$$

Опираясь на данные определения, сформулируем теорему, которая была доказана Эренфестом.

В жидкости вероятности центр тяжести объема R с координатами \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} с течением времени перемещается так, как в классической механике перемещается материальная точка с массой m , на которую действует сила \bar{f} .

В самом деле, с учетом волнового уравнения, проводя интегрирование по частям (функция ψ предполагается достаточно гладкой и обращающейся в нуль на границах области R), получаем

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{x}}{dt} &= \int_R x \frac{\partial \psi \psi^*}{\partial t} d\tau = -\frac{h}{4\pi i m} \int_R x \sum_{x, y, z} \frac{\partial}{\partial x} \times \\ &\times \left[\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] d\tau = \frac{h}{4\pi i m} \int_R \left[\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] d\tau,\end{aligned}\tag{22}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} &= \frac{h}{4\pi i m} \int_R \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} + \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x \partial t} - \right. \\ &\left. - \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} \right) d\tau = \frac{h}{2\pi i m} \int_R \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) d\tau.\end{aligned}$$

На основании волнового уравнения отсюда имеем

$$\begin{aligned}\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} &= -\frac{h^2}{8\pi^2 m^2} \int_R \left[\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \left(\Delta \psi - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V \psi \right) + \right. \\ &\left. + \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\Delta \psi^* - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V \psi^* \right) \right] d\tau.\end{aligned}$$

Дважды интегрируя по частям, получаем

$$\int_R \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \Delta \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} \Delta \psi^* \right) d\tau = \int_R \left[\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \Delta \psi + \psi^* \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \psi) \right] d\tau = \\ = \int_R \frac{\partial}{\partial x} (\psi^* \Delta \psi) d\tau = 0,$$

откуда

$$m \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = \int_R V \frac{\partial}{\partial x} (\psi \psi^*) d\tau = - \int_R \frac{\partial V}{\partial x} \psi \psi^* d\tau, \\ m \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = - \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} = \bar{f}_x. \quad (23)$$

Два аналогичных уравнения справедливы для осей y и z . Тем самым доказана теорема Эренфеста.

Рассмотрим теперь какой-либо макроскопический эксперимент, позволяющий наблюдать движение частицы, скажем электрона. С макроскопической точки зрения длина волны, соответствующая волне ψ , крайне мала, и мы можем взять волновой пакет, размеры которого очень малы в макроскопическом масштабе (квазиточечный волновой пакет), но тем не менее велики по сравнению с длиной волны. Макроскопическое поле, действующее на частицу, будет очень мало изменяться в пределах волнового пакета, так что сила \bar{f} приближенно будет равна значению силы в центре волнового пакета. Таким образом, с макроскопической точки зрения мы можем вместо волнового пакета рассматривать только его центр тяжести. Поскольку же частица может обнаружить свое присутствие лишь внутри волнового пакета, на основании теоремы Эренфеста мы можем сказать, что частица движется по классическим законам. Разумеется, микроскопический опыт показал бы нам, что частица может находиться где-либо внутри волнового пакета, но с макроскопической точки зрения все такие возможные положения сливаются в одно, так как в нашем масштабе волновой пакет точечный¹⁾.

К данному вопросу можно подойти иначе, опираясь на теорему о групповой скорости.

Прежде всего напомним, что группа волн — это волновой пакет, который можно представить суперпозицией плоских монохроматических волн с *очень*

¹⁾ Поскольку все величины, входящие в уравнение Эренфеста вида (23), выражаются через одну и ту же волновую функцию ψ (подчиняющуюся волновому уравнению), они не являются независимыми. Поэтому в математическом отношении уравнения Эренфеста принципиально отличаются от уравнений классической механики Ньютона, где состояние в данный момент времени характеризуется заданием произвольно выбираемых координат и скоростей. Например, для стационарного состояния частицы, характеризующего собственными значениями трех коммутирующих между собой наблюдаемых, волновая функция зависит от трех параметров. Отсюда видно, что средние значения координат и скоростей не могут выбираться произвольно, но связаны между собой тремя соотношениями. — *Прим. ред.*

близкими частотами, длинами волн и направлениями распространения. Поэтому группу волн можно приближенно характеризовать определенными частотой, длиной волны и направлением распространения, хотя группа волн, строго говоря, не эквивалентна монохроматической волне. Размеры группы волн ограничены, поскольку ее составляющие, синфазные в центре группы волн, взаимно уничтожаются вне ее границ в результате интерференции. Нетрудно показать, что размеры группы волн всегда велики по сравнению со средней длиной волны λ_0 . В самом деле, если различные составляющие синфазны в центре группы волн, которая представляет собой суперпозицию волн с длинами волн в интервале $(\lambda_0 - \Delta\lambda, \lambda_0 + \Delta\lambda)$, где $\Delta\lambda \ll \lambda_0$, то для того, чтобы эти составляющие взаимно уничтожились в результате интерференции за пределами группы, изменение фазы волн с длиной волны от λ_0 до $\lambda_0 \pm \Delta\lambda$ должно быть не меньше $\pi/2$ при переходе от центра группы к ее границам. Если d — расстояние от центра группы до ее границы, то

$$\frac{d}{\lambda_0} - \frac{d}{\lambda_0 + \Delta\lambda} \approx \frac{d\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \approx \frac{\pi}{2}$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{\lambda_0} \approx \frac{\pi}{2} \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda} \gg 1,$$

что и требовалось доказать.

Выведем теперь формулу Рэлея, относящуюся к групповой скорости.

В среде с переменным показателем преломления в приближении геометрической оптики плоскую монохроматическую волну с частотой ν_0 можно представить в виде

$$a \exp[2\pi i[\nu_0 t - \varphi_1(x, y, z, \nu_0)]],$$

где φ_1 — полный интеграл уравнения геометрической оптики. Группа волн может быть описана функцией

$$\psi = \int_{\nu_0 - \Delta\nu}^{\nu_0 + \Delta\nu} a(\nu) \exp[2\pi i[\nu t - \varphi_1(x, y, z, \nu)]] d\nu, \quad \Delta\nu \ll \nu_0. \quad (24)$$

Положим $\nu = \nu_0 + \eta$, где η изменяется от $-\Delta\nu$ до $+\Delta\nu$. Приближенно мы можем написать

$$\psi = \exp[2\pi i[\nu_0 t - \varphi_1(x, y, z, \nu_0)]] \int_{-\Delta\nu}^{\Delta\nu} a(\eta) \times \\ \times \exp\left\{2\pi i\left[\eta t - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu}\right)_0 \eta\right]\right\} d\eta, \quad (25)$$

где $(\partial \varphi_1 / \partial \nu)_0$ — частная производная функции φ_1 по ν , взятая при $\nu = \nu_0$. В последней формуле интеграл является функцией параметра $t - (\partial \varphi_1 / \partial \nu)_0$, поэто-

му можно написать

$$\psi = F \left[t - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu} \right)_0 \right] \exp \{ 2\pi i [\nu_0 t - \varphi_1(x, y, z, \nu_0)] \}. \quad (26)$$

Таким образом, приближенно можно считать, что волновой пакет ведет себя как монохроматическая волна, амплитуда которой является функцией разности $t - (\partial \varphi_1 / \partial \nu)_0$. Нетрудно сообразить, что для очень больших промежутков времени это приближение становится неприменимым. Если при движении вдоль луча, ортогонального поверхностям $\varphi_1 = \text{const}$, мы перемещаемся таким образом, что $dt - (\partial^2 \varphi_1 / \partial \nu \partial s) ds = 0$, то мы будем перемещаться вместе с одним и тем же значением амплитуды. Поэтому можно считать, что за не очень большие промежутки времени группа волн перемещается как целое вдоль лучей со скоростью

$$U = \frac{ds}{dt} = \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \nu \partial s} \right)^{-1}. \quad (27)$$

Но мы видели, что величина $\partial \varphi_1 / \partial s = |\text{grad } \varphi_1|$ в любой точке равна обратному значению локальной длины волны $\lambda(x, y, z, \nu)$. Поэтому

$$\frac{1}{U} = \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{\lambda} \right) = \frac{\partial(\nu/\mathcal{V})}{\partial \nu} = \frac{1}{\mathcal{V}_0} \frac{\partial(n\nu)}{\partial \nu}. \quad (28)$$

Такова формула (называемая формулой Рэлея), которая дает выражение для групповой скорости в каждой точке. Если среда однородна, то U не зависит от x, y, z . Более того, в отсутствие дисперсии ($\partial n / \partial \nu = 0$) имеем $U = \mathcal{V}$ и групповая скорость совпадает с фазовой скоростью.

Применим формулу Рэлея к случаю распространения волн ψ в волновой механике. Если частица движется во внешнем поле с потенциалом $V(x, y, z)$, то [гл. 1, формула (30)]

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(E - V(x, y, z))}},$$

где $E = h\nu$, откуда

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{\lambda} \right) = \frac{\frac{1}{h} \partial \sqrt{2m(E - V)}}{\frac{1}{h} \partial E} = \frac{m}{\sqrt{2m(E - V)}} = \frac{1}{v},$$

так как $\sqrt{2m(E - V)} = mv$. Поэтому формула Рэлея дает

$$U = v.$$

Отсюда следует важная теорема волновой механики о групповой скорости.

Скорость группы волн ψ , сопоставляемой с частицей, равна скорости частицы, которая соответствует центральной частоте группы волн.

Вернемся к вопросу о связи между классической механикой и волновой механикой в макроскопической области. В этой области поля, а следовательно, и показатель преломления для волны ψ мало меняются в пределах длины волны. Поскольку же длина волны очень мала, мы можем рассматривать группы волн, которые в наших масштабах являются почти точечными. Рассмотрим монохроматическую волну, соответствующую центральной частоте ν_0 группы волн. Для нее имеются семейство поверхностей равной фазы $\varphi_1(x, y, z, \nu_0) = \text{const}$ и лучи, т. е. кривые, ортогональные этим поверхностям.

С макроскопической точки зрения группа волн аналогична капельке, движущейся по лучевой трубке. В микроскопическом масштабе, сравнимом с длиной волны, в центральной части она будет аналогична монохроматической волне и лишь на границах из-за интерференции различных составляющих ее интенсивность быстро падает до нуля. Волновой пакет распространяется вдоль лучей со скоростью U , равной скорости классической частицы в данном поле. Поскольку в макроскопическом масштабе мы не можем различать отдельные точки группы волн и последняя представляется нам одной точкой, а частица может обнаружить себя лишь внутри группы, у нас возникает впечатление, что точечная частица движется по классическим законам. Таким образом, мы снова приходим к тем же выводам, что и в случае рассуждений, основанных на теореме Эренфеста. Эта теорема и теорема о групповой скорости тесно связаны между собой, и обе позволяют установить соответствие между волновой и классической механикой в случае макроскопических явлений, когда распространение волны ψ можно рассматривать в приближении геометрической оптики.

Глава III

Волновая механика систем частиц

1. КЛАССИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА СИСТЕМ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Выше мы рассматривали частицу, находящуюся в известном силовом поле. Возникает вопрос: каким образом все изложенное обобщить на случай системы частиц, взаимодействующих между собой? Чтобы ответить на него, необходимо сначала вспомнить некоторые положения классической динамики для систем материальных точек.

Рассмотрим систему, состоящую из N частиц. Пусть i -я частица характеризуется массой m_i и координатами x_i, y_i, z_i . Тогда кинетическая энергия системы дается выражением

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left[\left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt} \right)^2 \right]. \quad (1)$$

Импульсы, соответствующие трем координатам, таковы:

$$p_{x_i} = m_i \frac{dx_i}{dt}, \quad p_{y_i} = m_i \frac{dy_i}{dt}, \quad p_{z_i} = m_i \frac{dz_i}{dt}. \quad (2)$$

Потенциальная энергия системы $V(x_1, \dots, z_N, t)$ состоит из членов двоякого рода: 1) членов, характеризующих взаимодействие между частицами и по предположению зависящих лишь от расстояний между ними; они имеют вид $V_{ij}(\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2})$; 2) членов, характеризующих возможное действие внешнего поля на каждую из частиц; они имеют вид $V_i(x_i, y_i, z_i, t)$. Формула Гамильтона дает энергию как функцию координат и импульсов:

$$H(x_1, \dots, z_N, t) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} (p_{x_i}^2 + p_{y_i}^2 + p_{z_i}^2) + V(x_1, \dots, z_N, t). \quad (3)$$

Если внешнее поле не зависит от времени или вовсе отсутствует, то V не зави-

сит от t , и, как известно, для консервативных систем величина H при движении сохраняет постоянное значение E .

Теория Якоби может быть обобщена на случай систем частиц. В этом случае уравнение Якоби имеет вид

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_i} \right)^2 \right] + V(x_1, \dots, z_N, t) = \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (4)$$

Если удастся найти полный интеграл этого уравнения, содержащий $3N$ произвольных неаддитивных постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{3N}$, то возможное движение получим, написав

$$\frac{\partial S(x_1, \dots, z_N, t, \alpha_1, \dots, \alpha_{3N})}{\partial \alpha_i} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, 3N, \quad (5)$$

где a_i — это $3N$ новых произвольных постоянных, причем импульсы Лагранжа даются формулами

$$p_{x_i} = - \frac{\partial S}{\partial x_i}, \quad p_{y_i} = - \frac{\partial S}{\partial y_i}, \quad p_{z_i} = - \frac{\partial S}{\partial z_i} \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (6)$$

В частном случае, когда внешние взаимодействия не зависят от времени (или отсутствуют), энергия V не зависит от t и решение можно найти в форме $S = Et - S_1(x_1, \dots, z_N)$. В результате мы приходим к «укороченному» уравнению Якоби

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} \left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial y_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial z_i} \right)^2 \right] + V(x_1, \dots, z_N) = E, \quad (7)$$

для которого нам нужно найти полный интеграл, содержащий $3N$ произвольных неаддитивных постоянных $E, \alpha_1, \dots, \alpha_{3N-1}$. Уравнения движения принимают вид

$$\frac{\partial S_1}{\partial \alpha_i} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, N-1),$$

т. е. это уравнение траектории точки в конфигурационном пространстве x_1, \dots, z_N и уравнение зависимости от времени

$$\frac{\partial S_1}{\partial E} = t - t_0,$$

причем

$$p_{x_i} = \frac{\partial S_1}{\partial x_i}, \quad p_{y_i} = \frac{\partial S_1}{\partial y_i}, \quad p_{z_i} = \frac{\partial S_1}{\partial z_i}.$$

Как и в случае одной материальной точки, уравнение Якоби позволяет говорить о «классах» движений точки, представляющей систему в конфигурационном пространстве. Каждый класс соответствует определенной функции $S_1(x_1, \dots, z_N, E, \alpha_1, \dots, \alpha_{3N-1})$ с заданными значениями постоянных $E, \alpha_1, \dots, \alpha_{3N-1}$, причем различные движения внутри одного класса различаются числовыми значениями постоянных $a_1, a_2, \dots, a_{2N-1}$ и t_0 .

2. ВОЛНОВАЯ МЕХАНИКА ДЛЯ СИСТЕМ ЧАСТИЦ

Чтобы перейти к волновой механике для систем частиц, необходимо, как показал Шредингер, рассмотреть распространение волны в конфигурационном пространстве этой системы¹⁾, а чтобы получить в качестве первого приближения такой волновой механики классическую механику, необходимо, чтобы в приближении геометрической оптики это распределение описывалось теорией Якоби.

Предполагается, что уравнение, описывающее распространение волны в конфигурационном пространстве, получается тем же формальным методом, что и в случае одной частицы. В качестве исходного берется классическое выражение для функции Гамильтона $H(x_1, \dots, z_N, p_{x_1}, \dots, p_{z_N}, t)$, соответствующей рассматриваемой системе, и эту функцию превращают в оператор, заменяя импульсы $p_{x_k}, p_{y_k}, p_{z_k}$ операторами

$$P_{x_k} = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad P_{y_k} = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y_k}, \quad P_{z_k} = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z_k}. \quad (8)$$

В результате получают оператор Гамильтона, или гамильтониан,

$$H \left(x_1, \dots, z_N, -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z_N}, t \right),$$

а в качестве уравнения, описывающего распространение волны, берется урав-

¹⁾ В 1926 г. де Бройль отказался это признать [1, 29], считая, что волны, связываемые с различными частицами системы, «имеют физическую реальность и должны описываться функциями трех пространственных координат и времени». В 1927 г. он впервые попытался построить заново теорию систем в физическом пространстве [1, 34]. Подобную же попытку он повторил 25 лет спустя вместе с Андраде э Сильвой. Но в то время, когда им писались эти строки, он безоговорочно придерживался точки зрения, ставшей общепринятой. — Ж. Л.

нение

$$H \left(x_1, \dots, z_N, -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z_N}, t \right) \psi = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (9)$$

Таким образом, получаем

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{m_k} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_k^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_k^2} \right) - \frac{8\pi^2}{h^2} V(x_1, \dots, z_N, t) \psi = \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (10)$$

При $N = 1$ это — уравнение для одной частицы.

В случае консервативных систем ($\partial V/\partial t = 0$) можно рассмотреть монохроматические решения, в которых зависимость от времени содержится лишь в множителе $\exp[(2\pi i/h)Et]$. Тогда уравнение (10) переписывается в виде

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{m_k} \Delta_k \psi + \frac{8\pi^2}{h^2} [E - V(x_1, \dots, z_N)] \psi = 0. \quad (11)$$

Если в некоторой области конфигурационного пространства потенциальная энергия V (а следовательно, и показатель преломления) медленно меняется на расстояниях порядка длины волны, то допустимо приближение геометрической оптики и волна описывается приближенной формулой

$$\psi = a \exp \left[\frac{2\pi i}{h} (Et - S_1) \right], \quad (12)$$

где a — медленно меняющаяся функция, производные которой малы по сравнению с производными функции S_1 . Подставив это выражение в уравнение, описывающее распространение волны, получим, что функция S_1 должна удовлетворять уравнению Якоби для системы частиц, чем устанавливается связь с классической механикой.

Интересен случай, когда частицы системы не взаимодействуют между собой. Тогда их в равной мере можно рассматривать и как изолированные, и как образующие систему. Поскольку функция V сводится к членам $V_i(x_i, y_i, z_i, t)$, выражающим действие внешнего поля на отдельные частицы, уравнение для системы принимает вид

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{m_k} \Delta_k \psi - \frac{8\pi^2}{h^2} \sum_k V_k(x_k, y_k, z_k, t) \psi = \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (13)$$

Полагая $\psi(x_1, \dots, z_N, t) = \psi_1(x_1, y_1, z_1, t) \dots \psi_N(x_N, y_N, z_N, t)$, получаем,

что уравнение для системы распадается на N уравнений типа

$$\frac{1}{m_k} \left(\frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial y_k^2} + \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial z_k^2} \right) - \frac{8\pi^2}{h^2} V(x_k, y_k, z_k, t) \psi_k = \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial \psi_k}{\partial t}, \quad (14)$$

откуда видно, что каждую частицу можно рассматривать изолированно. Вместе с тем уравнение распространения допускает также в качестве решений произвольные линейные комбинации функций $\sum_k \psi_k(x_k, y_k, z_k, t)$. Подобного рода линейные комбинации характеризуют случай, когда частицы ранее взаимодействовали между собой, в связи с чем их последующие состояния не являются независимыми. В противоположность этому решению $\sum_k \psi_k$ характеризуют случай, когда состояния независимы между собой.

3. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКИ ДЛЯ СИСТЕМ ЧАСТИЦ

Нетрудно обобщить принцип интерференции на случай систем частиц. При этом он получает следующую формулировку: если состояние системы частиц характеризуется волновой функцией $\psi(x_1, \dots, z_N, t)$, то вероятность обнаружения на опыте в момент времени t точки, описывающей положение системы в конфигурационном пространстве, в элементе объема $d\tau = dx_1 \dots dz_N$ равна $|\psi|^2 d\tau = \psi(x_1, \dots, z_N, t) \psi^*(x_1, \dots, z_N, t) d\tau$. Если имеется только одна частица, то мы, очевидно, возвращаемся к рассмотренной ранее форме принципа интерференции. Для N частиц, которые не взаимодействуют между собой и никогда не взаимодействовали ранее (независимые состояния), имеем

$$\psi = \prod_{k=1}^N \psi_k(x_k, y_k, z_k, t)$$

и, следовательно,

$$|\psi|^2 d\tau = |\psi_1(x_1, y_1, z_1, t)|^2 dx_1 dy_1 dz_1 \dots |\psi_N(x_N, y_N, z_N, t)|^2 dx_N dy_N dz_N. \quad (15)$$

Таким образом, вероятность того, что точка, характеризующая систему, будет находиться в элементе объема $dx_1 \dots dz_N$ конфигурационного пространства, равна произведению вероятностей нахождения первой частицы в элементе объема $dx_1 dy_1 dz_1, \dots, N$ -й частицы — в элементе объема $dx_N dy_N dz_N$. Этот результат соответствует теореме умножения вероятностей: поскольку присутствие различных частиц в разных областях пространства — события независимые, волновая функция ψ должна иметь форму произведения

$$\prod_{k=1}^N \psi_k.$$

Чтобы величина $|\psi|^2 d\tau$ давала абсолютную вероятность нахождения точки, характеризующей систему, внутри элемента $d\tau$ конфигурационного про-

странства, волновую функцию необходимо нормировать, положив

$$\int_{3N} \dots \int |\psi|^2 dx_1 \dots dz_N = 1.$$

Этим условием функция ψ определяется с точностью до постоянного фазового множителя вида $\exp(i\alpha)$.

Чтобы показать, что нормировка, проведенная в некоторый момент времени t , сохраняется с течением времени, рассмотрим фиктивную вероятностную жидкость, определяемую в конфигурационном пространстве соотношениями

$$\rho = |\psi|^2,$$

$$\rho \mathbf{v}_k = (\rho v_{x_k}) + \frac{\partial}{\partial y_k} (\rho v_{y_k}) + \frac{\partial}{\partial z_k} (\rho v_{z_k}) \quad (16)$$

Здесь \mathbf{v}_k — вектор с компонентами dx_k/dt , dy_k/dt , dz_k/dt , а grad_k — оператор с компонентами $\partial/\partial x_k$, $\partial/\partial y_k$, $\partial/\partial z_k$.

Умножая уравнение распространения на ψ^* , а сопряженное уравнение на ψ и вычитая одно из другого, получаем

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{m_k} [\psi^* \Delta_k \psi - \psi \Delta_k \psi^*] = \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial}{\partial t} (\psi \psi^*),$$

или

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{m_k} \text{grad}_k (\psi^* \text{grad}_k \psi - \psi \text{grad}_k \psi^*) = \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Пользуясь определением фиктивной жидкости вероятности, имеем также

$$\sum_{k=1}^N \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_{x_k}) + \frac{\partial}{\partial y_k} (\rho v_{y_k}) + \frac{\partial}{\partial z_k} (\rho v_{z_k}) \right] + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (17)$$

Это уравнение представляет собой гидродинамическое уравнение непрерывности $\text{div}(\rho \mathbf{v}) + \partial \rho / \partial t = 0$, обобщенное на случай $3N$. В нем находит выражение то обстоятельство, что фиктивная жидкость вероятности сохраняется при своем движении в конфигурационном пространстве. Таким образом, нормировка функции ψ с течением времени не меняется.

Принцип спектрального разложения формулируется так же, как и в случае одной частицы. Если система консервативная, то волну ψ всегда можно представить в виде суперпозиции монохроматических волн, и интенсивность каждой спектральной составляющей дает вероятность экспериментального обнаружения у системы соответствующей энергии.

Представив волновой пакет в конфигурационном пространстве в виде интеграла Фурье, можно получить соотношение неопределенностей в форме

$$\Delta x_k \Delta p_{x_k} \geq h.$$

Это соотношение имеет такой же смысл, как и для отдельной частицы.

В изложенной выше теории предполагалось, что частицы могут свободно двигаться во всем пространстве (системы без связей), и мы использовали прямоугольную (декартову) систему координат для частиц при описании системы. Если пользоваться криволинейными координатами, как это принято при наличии связей, когда число степеней свободы меньше $3N$, то теория будет несколько отличаться от изложенной выше. Здесь мы не останавливаемся на данном вопросе [II, 22]. Кроме того, если система содержит одинаковые частицы, то неразличимость таких частиц приводит к исключению некоторых решений уравнения распространения. Подобного рода вопросы мы здесь также оставляем в стороне.

Глава IV

Общий формализм волновой механики

Теперь мы станем на другую точку зрения и изложим общие принципы волновой механики более формально. Чтобы изложить их с очень высокой степенью математической строгости, пришлось бы во многих случаях обращаться к чрезвычайно сложному математическому аппарату, что, однако, не устранило бы сомнений в некоторых пунктах.

Правда, теория стала бы более удовлетворительной с точки зрения читателей со строгим складом ума, но по своим результатам она почти не отличалась бы от более схематической теории, которую я собираюсь изложить и в которой есть все, чего требует теоретическая физика.

1. НОВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕЛИЧИН, СОПОСТАВЛЯЕМЫХ С ЧАСТИЦЕЙ (ИЛИ СИСТЕМОЙ ЧАСТИЦ)

Мы изложим общий формализм волновой механики, рассматривая случай частицы, находящейся в известном силовом поле. Обобщение на случай систем частиц производится без труда, примерно так же, как и ранее.

Формальная процедура, в результате которой из классической функции Гамильтона получается оператор Гамильтона, заключалась в замене переменных x, y, z операторами $x \times, y \times, z \times$, а переменных p_x, p_y, p_z — операторами

$$-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y}, \quad -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Так мы впервые встретились с идеей замены «физических величин» классической механики соответствующими «операторами». В ходе развития волновой механики эта идея выросла в общий принцип. Принимается, что любой определяемой в обычной механике или в классической физике физической величине (наблюдаемой) в новой механике должен соответствовать некий оператор. Вид операторов, соответствующих классическим выражениям для наблюдаемых физических величин, находят по правилу, в котором обобщено правило

образования оператора Гамильтона, а именно путем замены

$$q \rightarrow q \times, \quad p \rightarrow -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q}.$$

В результате такой замены пространственные переменные превращаются в операторы, но время t остается числовой переменной. С этой гипотезой, нарушающей симметрию между пространственными и временными переменными, связаны те трудности, которые возникают при попытках объединить квантовую теорию с теорией относительности.

Поскольку классическая механика в каждой задаче дает нам выражения для всех механических величин, сопоставляемых частице, в виде функций канонических переменных x, y, z, p_x, p_y, p_z и времени t , остается лишь заменить в этих выражениях каждую из канонических переменных соответствующим оператором, и мы получим искомый квантовый оператор. Если в выражение для классической величины входит время как параметр, то оно будет входить и в полученный оператор. При использовании прямоугольных декартовых координат этот оператор однозначно определяется вне зависимости от порядка множителей в классическом выражении¹⁾. В других же системах координат этого нет, и для построения приемлемого оператора приходится «симметризовать» классическое выражение по особым правилам.

В качестве примера применим изложенный метод получения оператора к z -составляющей импульса частицы. Легко находим

$$(M_z)_{\text{опер}} = (xp_y - yp_x)_{\text{опер}} = -\frac{h}{2\pi i} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (1)$$

где φ — угол поворота вокруг оси Oz .

Операторы, которые в волновой механике указанным выше образом соответствуют наблюдаемым величинам, в общем случае являются комплексными. Они линейны, т. е. для них выполняются соотношения

$$A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2); \quad A(c\varphi) = cA(\varphi) \quad (c \text{ — комплексная постоянная}). \quad (2)$$

Кроме того, эти операторы эрмитовы, т. е.

$$\int_D f^* A(g) d\tau = \int_D g A^*(f^*) d\tau, \quad (3)$$

где f и g — ограниченные, гладкие и непрерывные функции в области D изменения переменных, которая может быть выбрана произвольно. Эти функции должны обращаться в нуль на границах области, чтобы поверхностные интегралы, возникающие при интегрировании по частям выражения (3), равнялись нулю. В каждом частном случае можно убедиться, что операторы, со-

¹⁾ Это верно лишь для операторов специального вида. — Прим. ред.

ответствующие наблюдаемым величинам, являются эрмитовыми. Физические основания для этого мы обсудим в дальнейшем.

Среди операторов волновой механики нам будет полезно различать «полные операторы», содержащие все переменные из области D , и «неполные операторы», которые включают лишь часть этих переменных¹⁾. Для свободной частицы, движущейся в трехмерном пространстве, оператор $(p_x)_{\text{опер}}$ очевидно, не является полным, тогда как оператор $H_{\text{опер}}$ будет полным.

Итак, любой физической величине, характеризующей частицу, в волновой механике ставится в соответствие линейный эрмитов оператор, в общем случае комплексный, который строится по определенным правилам на основе классического выражения. Но мы знаем, что при измерении физической величины получается действительное число. Поэтому волновая механика должна уметь на основании вида операторов предсказывать существенно действительные значения физических величин, которые могут быть получены в результате измерения последних.

Зная линейный и эрмитов оператор, сопоставляемый в новой механике некой физической величине, мы должны уметь получать набор действительных чисел, в котором представлены все возможные результаты измерения этой величины. Это оказывается возможным вследствие того, что линейные и эрмитовы операторы обладают только действительными «собственными значениями». Рассмотрим данный вопрос в общем случае.

2. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ЛИНЕЙНОГО ЭРМИТОВА ОПЕРАТОРА

Пусть A — линейный эрмитов оператор. Напишем уравнение

$$A\varphi = \alpha\varphi,$$

где φ — функция переменных, которые входят в A , а α — постоянная. Время t может входить в A , φ и α в качестве числового параметра. Назовем собственными значениями оператора A в области D такие значения постоянной α , для которых существует по меньшей мере одно решение $\varphi(x, y, z, \alpha)$, называемое собственной функцией, обладающее следующими свойствами. Это решение гладко и непрерывно в области D , причем интеграл от квадрата его модуля в этой области сходится, откуда, очевидно, следует, что если область D бесконечна, то функция φ на бесконечности должна убывать достаточно быстро. Наконец, если область D конечна, то решение φ должно, кроме того, обращаться в нуль на ее границах.

Отметим, что в качестве различных решений уравнения на собственные значения $A\varphi = \alpha\varphi$ мы рассматриваем лишь линейно-независимые решения.

¹⁾ В плоскости xOy оператор $x(\partial/\partial y) - y(\partial/\partial x)$ не является полным, так как он равен $\partial/\partial\varphi$. — Л. Б.

Допустим (это тонкий момент с точки зрения математической строгости), что для операторов волновой механики собственные значения существуют. Покажем, что они являются действительными. В самом деле, из уравнения на собственные значения и из сопряженного к нему легко получим

$$\int_D [\varphi^* A(\varphi) - \varphi A^*(\varphi^*)] d\tau = (\alpha - \alpha^*) \int_D \varphi \varphi^* d\tau.$$

Поскольку оператор A эрмитов, левая часть равенства равна нулю, а поскольку интеграл в правой части существенно положителен, должно выполняться равенство $\alpha = \alpha^*$, т. е. α — действительная постоянная.

Совокупность собственных значений образует «спектр» уравнения $A\varphi = \alpha\varphi$ (или спектр оператора A в области D). Если собственные значения изолированы, то спектр дискретен; это — спектр линий. Если же собственные значения образуют непрерывную последовательность, то спектр непрерывен, т. е. спектр полосовой. В отдельных случаях спектр может быть частично непрерывным и частично дискретным. Непрерывные спектры возникают лишь для бесконечных областей D .

Будем рассматривать дискретные спектры. Обозначим через α_i изолированное собственное значение. Тогда имеется по крайней мере одна соответствующая ему собственная функция $\varphi_i(x, y, z, t)$.

Покажем, что совокупность собственных функций дискретного спектра образует ортогональную систему, т. е. если φ_i и φ_j — две собственные функции, соответствующие различным собственным значениям α_i и $\alpha_j \neq \alpha_i$, то

$$\int_D \varphi_i^* \varphi_j d\tau = 0.$$

В самом деле, в силу действительности величины α_i имеем

$$\int_D [\varphi_i^* A(\varphi_j) - \varphi_j A^*(\varphi_i^*)] d\tau = 0 = (\alpha_j - \alpha_i) \int_D \varphi_i^* \varphi_j d\tau.$$

Левая часть равна нулю вследствие эрмитовости оператора A , что и приводит к формуле (4).

Однако приведенное доказательство неприменимо в случае, когда одному и тому же собственному значению соответствуют две собственные функции. В этом случае говорят, что собственное значение «вырождено». Пусть α_i — одно из таких собственных значений, которому соответствует p собственных линейно-независимых функций $\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \dots, \varphi_{ip}$. Поскольку оператор A всегда линеен, произвольная линейная комбинация этих p собственных функций — тоже собственная функция. В связи с этим $\varphi_{i1}, \dots, \varphi_{ip}$ можно заменить p линейно-независимыми комбинациями этих функций и эти комбинации можно выбрать таким образом, чтобы они были взаимно ортогональны. Поэтому всегда можно считать, что совокупность собственных функций линейного эрмитова оператора взаимно ортогональна.

Собственные функции, очевидно, определяются лишь с точностью до по-

стоянного комплексного множителя, поскольку если φ_i — решение уравнения $A\varphi_i = \alpha_i\varphi_i$, то $C\varphi$ также является решением из-за линейности оператора A . Модуль комплексной постоянной C всегда можно выбрать таким образом, что

$$\int_D \varphi_i \varphi_i^* d\tau = \int_D |\varphi_i|^2 d\tau = 1. \quad (5)$$

В этом случае функция φ_i называется нормированной; она содержит еще неопределенный фазовый множитель $\exp(i\alpha)$, по модулю равный единице.

Поскольку функции одновременно нормированы и ортогональны (ортонормированы), можно написать

$$\int_D \varphi_i \varphi_j^* d\tau = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, равный 1 при $i = j$ и равный 0 при $i \neq j$.

Мы рассматривали случай дискретного спектра. Если же оператор A обладает непрерывным спектром, то каждому собственному значению этого спектра будет соответствовать собственная функция $\varphi(x, y, z, \alpha)$, где вместо дискретного индекса пишется непрерывная переменная α . Так же, как это было сделано выше, нетрудно показать, что любая собственная функция непрерывного спектра ортогональна любой собственной функции дискретного спектра, если таковой имеется. Чтобы показать, что собственные функции непрерывного спектра нормированы и взаимно ортогональны, можно во избежание некоторых трудностей со сходимостью вместо самих собственных функций $\varphi(x, y, z, \alpha)$ использовать так называемые собственные дифференциалы $\int_{\alpha}^{\alpha + \Delta\alpha} \varphi(x, y, z, \alpha) d\alpha$, где $\Delta\alpha$ — очень малый интервал ($\alpha, \alpha + \Delta\alpha$) непрерывного спектра. Такая замена имеет физический смысл. Она соответствует аналогичной процедуре в классической теории волн, когда вместо плоской монохроматической волны, являющейся лишь абстракцией, используется группа волн, образованных путем суперпозиции волн с очень близкими частотами. Тот факт, что собственные дифференциалы нормированы и взаимно ортогональны, выражается соотношением

$$\frac{1}{\Delta\alpha} \int_D d\tau \left(\int_{\alpha'}^{\alpha' + \Delta\alpha} \varphi(x, y, z, \alpha) d\alpha \right)^* \int_{\alpha''}^{\alpha'' + \Delta\alpha} \varphi(x, y, z, \alpha) d\alpha = \delta_{\alpha' \alpha''}. \quad (6)$$

Собственные функции полных операторов волновой механики обладают тем важным свойством, что они образуют «полную» систему. Это означает, что при некоторых не очень жестких условиях функция, определенная в области D изменения переменных, от которых зависит оператор A , может быть разложена в ряд по собственным функциям этого оператора. (Для большей строгости здесь следовало бы ввести понятие «сходимости в среднем», чего мы в нашем кратком изложении не будем делать.) Например, функция $f(x, y, z)$ при очень общих предположениях может быть следующим образом разло-

жена по собственным функциям полного эрмитова оператора A :

$$f(x, y, z) = \sum_i c_i \varphi_i(x, y, z) + \int c(\alpha) \varphi(x, y, z, \alpha) d\alpha,$$

где сумма берется по дискретному спектру, а интеграл — по непрерывному. Эту формулу можно переписать с помощью собственных дифференциалов:

$$f(x, y, z) = \sum_i c_i \varphi_i(x, y, z) + \sum_{\Delta\alpha} c(\alpha) \int_{\alpha}^{\alpha + \Delta\alpha} \varphi(x, y, z, \alpha) d\alpha. \quad (7)$$

На основании соотношений ортонормированности собственных функций дискретного спектра и собственных дифференциалов получим формулы

$$c_i = \int_D \varphi_i^* f(x, y, z) d\tau;$$

$$c(\alpha) = \frac{1}{\Delta\alpha} \int_D d\tau \left(\int_{\alpha}^{\alpha + \Delta\alpha} \varphi(x, y, z, \alpha) d\alpha \right)^* f(x, y, z). \quad (8)$$

Коэффициенты c_i и $c(\alpha)$ обычно называются коэффициентами Фурье в разложении функции $f(x, y, z)$ по собственным функциям оператора A . Ряд и интеграл Фурье являются простыми частными случаями разложений подобного типа. Отметим, что в выражения для c_i и $c(\alpha)$ время может входить в качестве числового параметра.

Отметим также, что если $\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots$ — собственные значения линейного оператора A , то, как нетрудно убедиться, $\alpha_1^n, \dots, \alpha_i^n, \dots$ — собственные значения оператора A^n .

3. НЕПРЕРЫВНЫЙ СПЕКТР ГАМИЛЬТониАНА СВОБОДНОЙ ЧАСТИЦЫ. δ -ФУНКЦИЯ ДИРАКА

Уравнение на собственные значения гамильтониана можно написать в виде

$$H\varphi = E\varphi \quad (9)$$

(здесь вместо α взята величина E). Для свободной частицы $v = 0$ и $H = (-\hbar^2/8\pi^2m)\Delta$, так что

$$-\frac{\hbar^2}{8\pi^2m} \Delta\varphi = E\varphi. \quad (10)$$

Пусть \mathbf{p} — вектор импульса частицы. Тогда собственные функции оператора энергии имеют вид

$$\varphi(x, y, z, \mathbf{p}) = a \exp \left[-\frac{2\pi i}{h} (p_x x + p_y y + p_z z) \right] = a \exp \left[-\frac{2\pi i}{h} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \right], \quad (11)$$

где

$$\frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = \frac{p^2}{2m} = E. \quad (12)$$

Мы видим, что 1) любое положительное значение величины E является собственным значением; 2) всякому положительному значению E соответствует бесконечное множество собственных функций вида (11), где p_x, p_y, p_z принимают всевозможные значения, допускаемые уравнением (12). Таким образом, мы получаем для энергии непрерывный спектр, простирающийся от 0 до $+\infty$, в котором все значения E , отличные от нуля, бесконечно кратно вырождены.

Всякой собственной функции соответствует плоская монохроматическая волна, являющаяся решением волнового уравнения и имеющая вид

$$\psi(x, y, z, \mathbf{p}, t) = \varphi(x, y, z, \mathbf{p}) \exp \left(\frac{2\pi i}{h} Et \right) = a \exp \left(\frac{2\pi i}{h} [Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}] \right). \quad (13)$$

В результате мы снова получаем известные результаты. Зачастую вводят обозначение

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{h} \mathbf{p}, \quad k = \frac{2\pi}{hc} E, \quad (14)$$

и тогда можно написать

$$\psi(x, y, z, t, \mathbf{k}) = a \exp[i(kct - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})], \quad (15)$$

где

$$kc = \frac{1}{2m} |\mathbf{k}|^2 \frac{h}{2\pi}. \quad (16)$$

Вектор \mathbf{k} называется волновым вектором плоской волны, поскольку он полностью задает плоскую волну.

Отметим, что в качестве собственных функций оператора H с одинаковым успехом можно брать как $\psi_{\mathbf{k}}$, так и $\varphi_{\mathbf{k}}$, ибо они различаются только множителем $\exp(ikct)$, а собственные функции определяются лишь с точностью до множителя, по модулю равного единице.

Соотношение ортонормированности плоских волн можно записать, пользуясь собственными дифференциалами. В ходе соответствующих выкладок, которые мы здесь не воспроизводим, оказывается целесообразным ввести «несобственную», или «сингулярную», функцию Дирака $\delta(x)$, обладающую двумя следующими свойствами: 1) она есть четная функция аргумента x ; 2) всегда выполняется равенство

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\delta(x)dx = \begin{cases} f(0), & \text{если знаки } x_1 \text{ и } x_2 \text{ разные,} \\ 0, & \text{если знаки } x_1 \text{ и } x_2 \text{ одинаковы.} \end{cases}$$

Функцию $\delta(x)$ можно представить в виде сингулярной функции Дирихле, положив

$$\delta(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin 2\pi Nx}{\pi x}. \quad (17)$$

С учетом нормировки в конечном итоге получим, что нормированные собственные функции частицы в случае непрерывного спектра должны иметь вид

$$\varphi(x, y, z, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp[-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})], \quad (18)$$

$$\psi(x, y, z, t, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp[i(kct - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})].$$

Полнота совокупности этих собственных функций выражается в том, что при очень общих условиях функция $f(x, y, z)$ может быть разложена в интеграл Фурье, имеющий вид

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} c(\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{k}, \quad (19)$$

где через $d\mathbf{k}$ обозначено произведение $dk_x dk_y dk_z$. Коэффициенты $c(\mathbf{k})$ даются выражением

$$c(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_D f(x, y, z) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (20)$$

где через $d\mathbf{r}$ обозначено произведение $dx dy dz$. Это — не что иное, как классическое выражение для коэффициентов интеграла Фурье.

Аналогично можно написать

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} c(\mathbf{k}, t) \psi(x, y, z, t, \mathbf{k}) d\mathbf{k}, \quad (21)$$

где

$$c(\mathbf{k}, t) = c(\mathbf{k}) e^{-ikct}. \quad (22)$$

Глава V

Общие принципы вероятностной интерпретации волновой механики

1. ОБЩИЕ ИДЕИ

Волновая механика должна давать возможность вычислять собственные значения физических величин (наблюдаемых), сопоставляемых с частицей (или, при естественном обобщении, с системой частиц). Но в волновой механике состояние частицы (или, точнее говоря, состояние наших знаний о частице) описывается волновой функцией $\psi(x, y, z, t)$, являющейся решением волнового уравнения (мы будем предполагать, что она нормирована к единице). Кроме того, в волновой механике всякой физической величине, характеризующей частицу, сопоставляется линейный эрмитов оператор, позволяющий определить совокупность действительных чисел (собственных значений этого оператора) и полную систему функций (его собственных функций). Таким образом, мы можем сформулировать два фундаментальных принципа, лежащих в основе физической интерпретации волновой механики.

*Принцип 1*¹⁾. Возможные значения физической величины, т.е. различные возможные результаты измерения этой величины, являются собственными значениями линейного эрмитова оператора, соответствующего этой величине. (Принцип квантования.)

Принцип 2. Если состояние частицы характеризуется определенной волновой функцией $\psi(x, y, z, t)$, удовлетворяющей волновому уравнению, то вероятность того, что при измерении в момент времени t физической величины, соответствующей полному линейному эрмитову оператору A с невырожденными собственными значениями, будет получено определенное собственное значение, равна квадрату модуля коэффициента при соответствующей собственной функции в разложении функции ψ по нормированным собственным функциям оператора A . (Принцип обобщенного спектрального разложения.)

¹⁾ В противоположность большинству других авторов, де Бройль не рассматривает эти принципы как априорные, но пытается вывести их, исходя из волновой теории. Он не требует, чтобы любой эрмитов оператор соответствовал некой наблюдаемой, а лишь предполагает, что если нам известна наблюдаемая, то ее можно представить оператором. Читатель, воспитанный на стандартных курсах квантовой механики, поступит неправильно, если просто пролистает эти страницы как само собой разумеющееся. В действительности именно они дают возможность понять основания квантового формализма. — Ж. Л.

Иначе говоря, если функция ψ разлагается по собственным функциям и собственным дифференциалам оператора согласно формуле

$$\psi(x, y, z, t) = \sum_i c_i \varphi_i + \sum_{\Delta\alpha} c(\alpha) \int_{\alpha}^{\alpha + \Delta\alpha} \varphi(x, y, z, \alpha) d\alpha, \quad (1)$$

то вероятность получить собственное значение α_i равна $|c_i|^2$, а вероятность получить собственное значение, лежащее в пределах от α до $\alpha + \Delta\alpha$, равна $|c(\alpha)|^2 \Delta\alpha$.

Как нетрудно убедиться, в силу предполагаемой нормированности волновой функции ψ полная вероятность всех возможных исходов в точности равна единице. Разумеется, вероятности различных возможных собственных значений могут быть функциями параметра t .

Если оператор A имеет вырожденные собственные значения, то формулировка второго принципа должна быть дополнена. Пусть α_i — вырожденное собственное значение, которому соответствуют p нормированных, ортогональных, линейно-независимых собственных функций $\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \dots, \varphi_{ip}$. Тогда вероятность получить в момент времени t значение α_i физической величины будет равна сумме квадратов модулей коэффициентов при $\varphi_{i1}, \dots, \varphi_{ip}$ в разложении функции ψ , т.е. $\sum_{j=1}^p |c_{ij}|^2$. Как нетрудно убедиться, это выражение не зависит от произвола в выборе собственных функций $\varphi_{i1} \dots \varphi_{ip}$, что вполне естественно.

Если оператор A является неполным, то формулировка второго принципа должна быть видоизменена. В самом деле, в этом случае собственные функции оператора A не являются функциями всех переменных x, y, z , в связи с чем коэффициенты c_i и $c(\alpha)$ могут быть функциями переменных, не входящих в оператор A . Тогда вероятность получить некоторое собственное значение может и не равняться $|c_i|^2$, поскольку эта величина зависит еще и от других переменных. Чтобы найти эту вероятность, нужно проинтегрировать указанные выше выражения по переменным, от которых не зависит оператор A . Как нетрудно убедиться, после такого видоизменения полная вероятность (получить какое-либо из всевозможных собственных значений) по-прежнему будет равна единице.

Простым примером применения наших двух принципов может служить случай, когда H — полный оператор. Если оператор H не зависит от времени, то у него имеются *постоянные* собственные значения E_i и собственные функции φ_i . Измерение энергии может дать нам лишь одно из значений E_i , и если $\psi = \sum_i c_i \varphi_i$, то вероятность получить значение E_i будет равна $|c_i|^2$. В результате мы снова приходим к идее квантования атомных систем и к принципу спектрального разложения Борна. Если спектр дискретен, то мы получаем дискретную последовательность стационарных состояний с квантованными энергиями.

Рассмотрим другой случай, а именно координату x частицы, которой соответствует оператор «умножения на x ». Уравнение на собственные значения

имеет вид $x\varphi = \alpha\varphi$. Решение этого уравнения при всех действительных значениях x может быть записано в виде $\varphi(x, \alpha) = \delta(x - \alpha)$, где $\delta(x - \alpha)$ — сингулярная функция Дирака, обращающаяся в нуль при всех $x \neq \alpha$. Тогда в силу первого принципа при измерении x может получаться любое действительное число, заключенное между $-\infty$ и $+\infty$. При этом собственные дифференциалы соответствующего непрерывного спектра

$$\int_{\alpha}^{\alpha + \Delta\alpha} \delta(x - \alpha) d\alpha$$

образуют полную систему, удовлетворяющую условию ортонормированности. Из очевидной формулы

$$\psi(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\alpha, y, z, t) \delta(x - \alpha) d\alpha \quad (2)$$

следует, что вероятность при измерении координаты x в момент времени t получить значение, лежащее в пределах от α до $\alpha + \Delta\alpha$, равна

$$\Delta\alpha \iint_{-\infty}^{+\infty} |\psi(\alpha, y, z, t)|^2 dy dz.$$

Отсюда легко получить, что вероятность обнаружения частицы в момент времени t в элементе объема $d\tau$, содержащем точку x, y, z , равна $|\psi(x, y, z, t)|^2 d\tau$. Полная вероятность (вероятность нахождения частицы в какой-либо из доступных для нее точек пространства D) равна единице¹⁾, поскольку

$$\int_D |\psi|^2 d\tau = 1.$$

В дальнейшем мы подробно остановимся на выводе соотношений неопределенностей Гейзенберга из общих принципов, сформулированных выше²⁾.

¹⁾ Это и есть физическое требование нормированности функции ψ . Как мы увидим далее, из общих принципов можно вывести, что две физические величины A и B могут быть измерены одновременно лишь в том случае, если $AB = BA$. Отсюда следует, что канонически сопряженные переменные p и q не могут быть измерены одновременно. — Л. Б.

²⁾ Понятие суперпозиции. Всякая собственная функция φ_i оператора A описывает некое состояние системы, в котором физическая величина A с определенностью имеет точное числовое значение α_i . В общем случае волновая функция ψ для системы не сводится лишь к одной функции φ_i , но представляет собой линейную комбинацию таких функций: $\psi = \sum_i c_i \varphi_i$. Тогда говорят, что ψ есть «суперпозиция» функций φ_i . Этот термин заимствован из классической теории колебаний, где имеется «принцип суперпозиции малых колебаний», но здесь он имеет уже иной смысл. Здесь речь больше не идет о колебаниях среды, получаемых путем сложения отдельных элементарных колебаний. В данном случае его смысл таков. Если волновая функция φ системы имеет вид $\psi = \sum_i c_i \varphi_i$ и если мы хотим установить ее состояние φ_i , измеряя величину A , то мы

2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МАТРИЦЫ И ИХ СВОЙСТВА

Матрицей называется таблица чисел, содержащая конечное или бесконечное число строк и столбцов. Если таблица имеет конечные размеры, то для простоты мы будем предполагать ее квадратной. Всякое число, входящее в таблицу (элемент матрицы), можно пометить двумя индексами — номером строки и номером столбца таблицы. Обозначим через a_{ik} элемент, находящийся на пересечении i -й строки с k -м столбцом. Вся матрицу мы обозначим через A . Ее элементы a_{ii} называются диагональными, а матрица, в которой отличны от нуля лишь диагональные элементы, называется диагональной мат-

с вероятностью $|c_k|^2$ можем найти ее в состоянии φ_k . Таким образом, до измерения система, состояние которой описывается функцией $\psi = \sum c_i \varphi_i$, может находиться в

разных состояниях φ_i , вероятность каждого из которых отлична от нуля и равна $|c_i|^2$. Это совершенно новая идея, чуждая классическим теориям, в которых состояние системы характеризуется вполне определенными значениями физических величин, описывающих эту систему. Новое понятие суперпозиции — возможно, самое важное из всех понятий, введенных в новой механике.

Если в классической теории колебаний рассматриваются колебания, характеризуемые функцией $\psi = \sum c_i \exp[2\pi i(\nu_i t - z/\lambda_i)]$, то это означает, что величина ψ в каждый

момент времени в каждой точке пространства представляется в виде суммы членов ряда, в который амплитуды каждого из колебаний входят с соответствующими множителями c_i . В волновой механике к выражению для ψ в виде ряда добавляется условие $\sum |c_i|^2 = 1$, связанное с вероятностной интерпретацией функции ψ , и потому ψ уже

нельзя рассматривать как сумму волн с наперед заданными амплитудами. Например, в классической теории два волновых движения $\psi_1 = c_1 \exp[2\pi i(\nu t - z/\lambda)]$ и $\psi_2 = c_2 \exp[2\pi i(\nu t - z/\lambda)]$ в результате суперпозиции дают волну $\psi = \psi_1 + \psi_2$ с амплитудой $c_1 + c_2$. В волновой же механике два состояния ψ_1 и ψ_2 , рассматриваемые по отдельности, удовлетворяют условиям $|c_1| = 1/\sqrt{v}$ и $|c_2| = 1/\sqrt{v}$. При их суперпозиции получается тоже состояние $\psi = \psi_1 + \psi_2$, но с дополнительным условием $|c_1 + c_2| = 1/\sqrt{v}$, в силу которого обычное сложение амплитуд уже не имеет места. Это подчеркивает пропасть, разделяющую понятие волновой функции в классической теории волн и в волновой механике. — Л. Б.

(Замечание по поводу примечания автора.) Луи де Бройль рассматривает здесь лишь непрерывную и нормированную волну, лежащую в основе вероятностной интерпретации волновой механики. Примкнув к ортодоксальной точке зрения, он считал, что данные волны единственно возможны. В этом примечании видно, как он отстаивает новую для него точку зрения с тем большей силой, что ранее был убежден в противоположном. Именно к этим старым убеждениям, как мы знаем, он скоро вернулся, развивая теорию двойного решения. В последней он тщательно различает волну ψ , имеющую описанные выше свойства, и волну v (регулярную часть сингулярной волны u). Волна v имеет ту же самую фазу, что и волна ψ , но другую амплитуду; она не нормирована, не претерпевает редукции волнового пакета, но подчиняется обычному закону сложения составляющих в классической теории колебаний. Луи де Бройль в дальнейшем будет рассматривать ее как истинную физическую волну в противоположность волне ψ , являющейся лишь инструментом предсказания. — Ж. Л.

рицей. Две матрицы A и B считаются равными ($A = B$), если все их соответствующие элементы равны друг другу: $a_{ij} = b_{ij}$ при всех i и j .

В алгебре матрицы вводятся при изучении линейных преобразований. Если переменные x_i' представляют собой линейные комбинации переменных x_i , то формулы преобразования имеют вид $x_i' = \sum_j a_{ij}x_j$, что символически записывается как $X' = AX$, где $(AX)_i = \sum_j a_{ij}x_j$. Поэтому мы можем ввести следующие правила сложения и умножения двух матриц:

1) суммой двух матриц A и B будем считать матрицу $A + B$ с элементами $a_{ij} + b_{ij}$;

2) произведением матриц A и B будем считать матрицу AB , элементы которой, характеризуемые индексами ik , равны $\sum_j a_{ij}b_{jk}$.

Из последнего определения следует, что, вообще говоря, матрица AB не равна матрице BA . Если же в конкретном случае $AB = BA$, то говорят, что матрицы A и B коммутируют между собой. Часто «коммутатором» матриц A и B называют матрицу $AB - BA = [A, B]$, которая, если она отлична от нуля, характеризует степень некоммутативности матриц A и B .

Иногда вводят также матрицу $AB + BA = [A, B]_+$, называемую «антикоммутатором» матриц A и B . Если она равна нулю, то $AB = -BA$, и говорят, что матрицы A и B антикоммутируют; если же матрица-антикоммутатор отлична от нуля, то она служит мерой антикоммутативности матриц A и B .

Матрицы действительны или комплексны в зависимости от того, действительны или комплексны их элементы. Мы будем рассматривать общий случай комплексных матриц.

Матрица называется эрмитовой, если $a_{ik} = a_{ki}^*$ при всех i и k . В связи с этим действительная эрмитова матрица симметрична относительно диагонали, а диагональные элементы эрмитовой матрицы всегда действительны.

Матрица называется антиэрмитовой, если $a_{ik} = -a_{ki}^*$ при всех i и k . Диагональные элементы антиэрмитовой матрицы являются мнимыми.

Произведение двух эрмитовых матриц A и B является эрмитовым в том и только в том случае, если эти матрицы коммутируют; если же A и B антикоммутируют, оно будет антиэрмитовым.

Матрица \bar{A} называется «транспонированной» по отношению к A , если $\bar{a}_{ki} = a_{ik}$. «Сопряженной» по отношению к A называется такая матрица A^+ , для которой $a_{ik}^+ = a_{ki}^*$ или $A^+ = \bar{A}^*$. Для эрмитовых матриц $A = A^+$; в этом случае A — самосопряженная матрица.

Очевидно, что $(A^+)^+ = A$, причем, как легко показать, $(AB)^+ = B^+A^+$. Диагональная эрмитова матрица обязательно является действительной. В частности, диагональная эрмитова матрица $a_{ik} = \delta_{ik}$ называется единичной матрицей и часто обозначается символом 1 .

Пусть дана матрица A . Если существует такая матрица A^{-1} , что $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = 1$, то матрица A^{-1} называется обратной по отношению к A . Если квадратная матрица содержит конечное число строк и столбцов, то A^{-1} существует в том случае, если детерминант из элементов a_{ik} матри-

цы A отличен от нуля. Если A имеет бесконечное число строк и столбцов, то A^{-1} даже в этом случае может не существовать. Если A^{-1} и B^{-1} существуют, то всегда $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Если A — действительная матрица и если

$$\sum_j a_{ji}a_{jk} = \delta_{ik}; \quad \sum_l a_{jl}a_{kl} = \delta_{jk}, \quad (3)$$

то говорят, что матрица A является ортогональной. Соответствующее ей линейное преобразование характеризует в этом случае ортогональное преобразование в пространстве, которое оставляет инвариантным сумму $\sum_i x_i^2$. Это определение обобщается на случай комплексных матриц A . Если

$$\sum_j a_{ji}a_{jl}^* = \delta_{il}; \quad \sum_l a_{jl}a_{kl}^* = \delta_{jk}, \quad (4)$$

то матрицей A определяется комплексное ортогональное преобразование, называемое унитарным, причем, как нетрудно убедиться, для такого преобразования величина $\sum_i x_i^* x_i$ остается инвариантной. В этом случае матрица A называется унитарной, причем

$$\sum_i a_{ki}^+ a_{ij} = \delta_{kj}; \quad \sum_l a_{jl} a_{lk}^+ = \delta_{jk}, \quad (5)$$

т.е. $A^+ A = A A^+ = 1$, откуда $A^+ = A^{-1}$.

Отсюда видно, что матрица, сопряженная к унитарной матрице, совпадает с обратной матрицей.

Следом матрицы A называется сумма ее диагональных элементов $\text{Tr} A = \sum_i a_{ii}$. Отсюда следует, что

$$\text{Tr} AB = \text{Tr} BA = \sum_{ik} a_{ik} b_{ki}. \quad (6)$$

Пусть имеются две квадратные матрицы, одна из них A — произвольная, а вторая S — унитарная, имеющая такое же число строк и столбцов. Если выполняется соотношение

$$B = S^{-1}AS, \quad (7)$$

то говорят, что матрица B получается из A путем канонического преобразования. Как нетрудно убедиться, если матрица A эрмитова, то эрмитовой будет и матрица B . Стало быть, канонические преобразования сохраняют эрмитовость матриц, а также, как легко видеть, и след. Кроме того, если две квадратные матрицы A и A' в результате некоторого канонического преобразования преобразуются в B и B' , то их произведение AA' преобразуется в BB' в результате того же самого канонического преобразования, так как $S^{-1}AS \times S^{-1}A'S = S^{-1}AA'S$.

3. ОПЕРАТОРЫ И МАТРИЦЫ В ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКЕ

Предположим, что нам известна система ортонормированных функций $\varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots$, заданных в области D изменения некоторых переменных. Назовем их базисными функциями. Такими функциями могут быть, например, нормированные собственные функции линейного эрмитова оператора в волновой механике. Если задана такая система базисных функций, то любому линейному оператору мы можем поставить в соответствие матрицу. В самом деле, пусть A — линейный оператор. Действуя этим оператором на одну из базисных функций φ_i , получаем новую функцию, которая может быть разложена по базисным функциям. В результате мы приходим к соотношениям вида

$$A\varphi_i = \sum a_{ji}\varphi_j, \quad (8)$$

где

$$a_{ji} = \int_D \varphi_j^* A\varphi_i dt. \quad (9)$$

Здесь D — область изменения переменных, от которых зависят φ_i . По определению a_{ij} являются элементами матрицы, порождаемой оператором A в системе базисных функций φ_i . Обозначим эту матрицу тем же символом A , что и оператор, или, если мы хотим уточнить систему базисных функций, символом A^φ . Как нетрудно убедиться, определяемые таким путем матрицы удовлетворяют введенным выше правилам сложения и умножения алгебраических матриц.

Если система базисных функций образована собственными функциями операторов волновой механики и если сам оператор A является линейным эрмитовым оператором, то мы будем называть матрицу A квантовомеханической. Нетрудно видеть, что такие матрицы всегда эрмитовы, поскольку в силу определения элементов a_{ij} эрмитовость оператора A влечет за собой равенство $a_{ij} = a_{ji}^*$. Можно утверждать в более общем смысле, что необходимым и достаточным условием эрмитовости матрицы, порождаемой оператором A в некоторой системе базисных функций, является эрмитовость самого оператора. Поэтому эрмитовость является внутренним свойством операторов в том смысле, что эрмитов оператор порождает эрмитовы матрицы в любых системах базисных функций. Поэтому все матрицы волновой механики являются эрмитовыми.

Наши определения устанавливают тесную связь между операторами и матрицами. В частности, необходимым и достаточным условием коммутативности (или антикоммутативности) двух матриц является коммутативность (или антикоммутативность) соответствующих операторов, и наоборот. Поэтому можно ввести коммутатор $[A, B]$ и антикоммутатор $[A, B]_+$ двух операторов A и B :

$$[A, B] = AB - BA; [A, B]_+ = AB + BA. \quad (10)$$

Особенно важный класс квантовомеханических матриц получается в том случае, когда в качестве базисных функций берутся собственные функции опе-

ратора Гамильтона, соответствующего рассматриваемой задаче. Пусть $\psi_i, \dots, \psi_n, \dots$ — собственные функции оператора H . Матрицы A^ψ , порождаемые линейным эрмитовым оператором A в системе базисных функций ψ_j , состоят из элементов

$$a_{jk} = \int_D \psi_j^* A \psi_k d\tau. \quad (11)$$

Их можно назвать матрицами Гейзенберга, поскольку именно Гейзенберг положил их в основу своей квантовой механики. Если в выражение для ψ_k входит экспоненциальный множитель $\exp[(2\pi i/h) E_k t]$ и если положить

$$\psi_k = a_k(x, y, z) \exp\left(\frac{2\pi i}{h} E_k t\right),$$

то получим

$$a_{jk} = \int_D a_j^* A a_k d\tau \exp\left(\frac{2\pi i}{h} (E_k - E_j)t\right). \quad (12)$$

Эти элементы составляют матрицу Гейзенберга, зависящую от времени. В отдельных случаях в выражении для ψ_k опускают экспоненциальный множитель

и полагают $a'_{jk} = \int_D a_j^* A a_k d\tau$; в результате получается матрица A' , элементы

которой a'_{jk} не зависят от времени. Это — матрица Шредингера, соответствующая рассмотренной выше матрице Гейзенберга. Мы, как правило, будем пользоваться матрицами Гейзенберга.

В случае матриц Гейзенберга матрица H , соответствующая энергии, есть диагональная матрица, диагональные элементы которой суть собственные значения оператора энергии (т.е. квантованные стационарные значения энергии). Правда, если у оператора H имеются вырожденные собственные значения, то сказанное выше будет справедливо лишь в том случае, если выбрать собственные функции, соответствующие кратным собственным значениям, так, чтобы они были взаимно ортогональными. Это сразу же явствует из равенства

$$H_{jk} = \int_D \psi_j^* H \psi_k d\tau = E_k \int_D \psi_j^* \psi_k d\tau = E_k \delta_{jk}.$$

Отметим, что изложенный результат представляет собой всего лишь частный случай следующей легко доказываемой теоремы: если матрица, порождаемая оператором A , строится в системе собственных ортонормированных функций этого оператора, то матрица будет диагональна и ее диагональные элементы будут равны собственным векторам оператора A (причем вырожденные собственные вектора должны в нее соответственно их степени вырождения).

4. СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ И ДИСПЕРСИИ В ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКЕ

В любом состоянии частицы (или системы частиц), характеризуемом волновой функцией ψ определенного вида, для любой физической величины A возможен целый ряд значений (результатов измерения величины A), имеющих определенную вероятность. Поэтому можно рассматривать «среднее значение» \bar{A} величины A , равное математическому ожиданию, которое соответствует измерению величины A .

Пусть α_i — собственные значения, а f_i — собственные функции оператора A . Тогда среднее значение \bar{A} , согласно сформулированным выше общим принципам, будет определяться формулой $\bar{A} = \sum_i \alpha_i |c_i|^2$. Можно также написать (в чем нетрудно убедиться, подставив $\psi = \sum_i c_i \varphi_i$ и учитывая ортонормированность функций φ_i)

$$\bar{A} = \int_D \psi^* A \psi / d\tau, \quad (13)$$

что позволяет вычислять \bar{A} по известной функции ψ .

Определив среднее значение случайной величины A , можно легко найти соответствующую дисперсию (в смысле теории вероятностей), т.е. квадратный корень из среднего квадрата отклонения¹⁾. Обозначив дисперсию через σ_A , получим

$$\sigma_A = \sqrt{(A - \bar{A})^2} = \sqrt{A^2 - 2 \bar{A} A + \bar{A}^2},$$

или

$$\sigma_A^2 = \int_D \psi^* A^2 \psi d\tau - \left(\int_D \psi^* A \psi d\tau \right)^2. \quad (14)$$

Рассмотрим теперь две физические величины A и B , характеризующие частицу. Величине A соответствуют собственные значения α_i и собственные функции φ_i , а величине B — собственные значения β_k и собственные функции χ_k . Если разложение волновой функции в виде $\psi = \sum_i d_i \varphi_i$ подставить в выражение для \bar{B} , то получим

$$\bar{B} = \sum_{ik} d_i^* d_k b_{ik}^o. \quad (15)$$

Здесь b_{ik}^o — элемент (с индексами i и k) матрицы, порождаемой оператором B в системе базисных функций φ_k . Таким образом, среднее значение величины B всегда можно представить в виде линейной комбинации элементов матрицы,

¹⁾ Вообще говоря, дисперсией в теории вероятностей и в математической статистике называют квадрат величины σ , но здесь и далее это не имеет принципиального значения. — *Прим. ред.*

порождаемой оператором B в системе собственных функций оператора A .

В частности, если частица (или система частиц) находится в одном из собственных состояний оператора A (что имеет место после точного измерения физической величины A), то $\psi = d_i \varphi_i$, где $|d_i| = 1$, т.е.

$$\bar{B} = b_{ii}^{\varphi}, \quad (16)$$

Отсюда следует теорема: диагональный элемент с индексами ii матрицы, порождаемой оператором B в системе собственных функций оператора A , равен среднему значению величины B для случая, когда известно, что величина A имеет точное значение α_i .

Эта теорема придает физический смысл диагональным элементам квантовомеханических матриц. Другая теорема позволит нам приписать физический смысл и недиагональным элементам.

Снова предположим, что частица находится в состоянии $\psi = \varphi_i$. Как мы только что видели, b_{ii}^{φ} есть среднее значение величины B в этом состоянии. Тогда среднее значение величины B^2 будет равно

$$\overline{B^2} = \int_D \varphi_i^* B^2 \varphi_i d\tau = (B^2)_{ii}^{\varphi} = (b_{ii}^{\varphi})^2. \quad (17)$$

Но из правила умножения матриц следует, что

$$(b_{ii}^{\varphi})^2 = \sum_j b_{ij}^{\varphi} b_{ji}^{\varphi} = (b_{ii}^{\varphi})^2 + \sum_{j \neq i} b_{ij}^{\varphi} b_{ji}^{\varphi} = (b_{ii}^{\varphi})^2 + \sum_{j \neq i} |b_{ij}^{\varphi}|^2,$$

поскольку матрица B эрмитова, так что

$$\sigma_B^2 = \overline{B^2} - (\bar{B})^2 = \sum_{j \neq i} |b_{ij}^{\varphi}|^2 = \sum_{j \neq i} |b_{ji}^{\varphi}|^2, \quad (18)$$

откуда следует теорема: если матрица физической величины B строится в системе собственных функций φ_i другой физической величины A , то сумма квадратов модулей *недиагональных* элементов, входящих в i -ю строку (или в i -й столбец) матрицы B , равна квадрату дисперсии σ_B величины B при условии, что величина A имеет точное значение α_i . Эта теорема придает физический смысл недиагональным элементам.

Если собственные функции χ_i оператора B совпадают с собственными функциями φ_i оператора A (как мы увидим, необходимым условием для этого является равенство $[A, B] = 0$), то в состоянии $\psi = \varphi_i = \chi_i$ величина B имеет точное значение β_i , соответствующее собственной функции χ_i , и матрица B^{φ} является диагональной. В этом случае $\sigma_B = 0$.

5. ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ В ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКЕ

Рассмотрим матрицу Гейзенберга A , элементы которой определяются формулами $a_{jk} = \int_D \psi_j^* A \psi_k d\tau$. Элементы a_{jk} могут зависеть от времени t , что

может быть обусловлено зависимостью от времени как функций ψ_j^* и ψ_k , так и оператора A . Продифференцируем a_{jk} по t и учтем, что оператор A эрмитов, а ψ_j и ψ_k удовлетворяют волновому уравнению. Отсюда легко получим

$$\frac{da_{jk}}{dt} = \int_D \psi_j^* \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h} (AH - HA) \right) \psi_k d\tau, \quad (19)$$

где $\partial A / \partial t$ — оператор, получаемый при формальном дифференцировании оператора A по параметру t . Полученную формулу мы можем интерпретировать следующим образом. Матрица Гейзенберга, элементы которой с индексами jk равны da_{jk}/dt , в системе базисных функций ψ_i порождается символическим оператором dA/dt вида

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h} [AH - HA]. \quad (20)$$

Очень часто оказывается, что оператор A не зависит явно от времени. Тогда $\partial A / \partial t \equiv 0$ и $dA/dt = (2\pi i/h)[A, H]$ ¹⁾.

В тех случаях, когда задан гамильтониан H , наблюдаемая величина, соответствующая оператору A , называется первым интегралом или интегралом движения для рассматриваемой задачи, если производная dA/dt равна нулю, т.е. если

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h} [A, H] \equiv 0. \quad (21)$$

Если A не зависит явно от времени, то физическая величина A является интегралом движения в том случае, когда оператор коммутирует с оператором Гамильтона.

Интеграл движения можно определить также следующим образом. Физическая величина, которой соответствует оператор A , является интегралом движения, если наряду с произвольным решением волнового уравнения ψ его решением будет также $A\psi$. В самом деле, по предположению $\partial\psi/\partial t = (2\pi i/h)H\psi$, и мы имеем

$$A \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{2\pi i}{h} AH\psi, \quad \frac{\partial}{\partial t} A\psi = \frac{\partial A}{\partial t} \psi + A \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t} \psi + \frac{2\pi i}{h} AH\psi. \quad (22)$$

Чтобы функция $A\psi$ была решением волнового уравнения, должно выполняться соотношение

$$\frac{\partial A}{\partial t} \psi + \frac{2\pi i}{h} (AH - HA)\psi = 0. \quad (23)$$

¹⁾ Отсюда легко получить, что в случае наблюдаемой A , не зависящей явно от времени, имеем $dA/dt = (2\pi i/h)[A, H]$. — Л. Б.

Необходимым и достаточным условием того, чтобы этому уравнению удовлетворяло любое решение ψ волнового уравнения, как раз и является соотношение (21), что и требовалось доказать.

Приведем несколько обычных примеров интегралов движения.

Если действующее на частицу (или на систему частиц) внешнее поле не зависит от времени, то оператор H не содержит времени t , и поскольку он, очевидно, коммутирует сам с собой, то энергия является интегралом движения. Здесь мы имеем аналогию с законом сохранения энергии для консервативных систем в классической механике. Таким же образом получим, что если составляющая поля по оси x равна нулю, то оператор H не зависит от x (так как $\partial V/\partial x = 0$) и коммутирует с $(p_x)_{\text{опер}}$, а потому интегралом движения является составляющая вектора импульса. Этот результат аналогичен подобной теореме в классической механике.

Наконец, если силовое поле V не меняется при повороте вокруг оси Oz , т.е. если потенциальная энергия не зависит от угла φ поворота вокруг этой оси, то гамильтониан H не зависит от φ и потому коммутирует с оператором, соответствующим составляющей углового момента по оси z :

$$(M_z)_{\text{опер}} = -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

По этой причине величина M_z , как и в классической механике, является интегралом движения. Если силовое поле является центральным, то интегралами движения будут три составляющие углового момента \mathbf{M} по трем взаимно перпендикулярным осям, проходящим через центр. Интегралом движения будет также величина $M^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2$ (квадрат углового момента). Поэтому скажем несколько слов об угловом моменте.

6. УГЛОВОЙ МОМЕНТ В ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКЕ

Здесь мы не будем рассматривать спин и будем говорить только об орбитальном угловом моменте. Для отдельной частицы орбитальным угловым моментом относительно центра O (принимаемого за начало координат) называется вектор углового момента частицы относительно точки O , т.е.

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]. \quad (24)$$

Его составляющими будут $M_x = yp_z - zp_y, \dots$

Мы только что видели, что если действующее на частицу поле имеет нулевой момент по отношению к одной из осей, то составляющая вектора \mathbf{M} вдоль этой оси является интегралом движения.

Квадрат длины вектора орбитального углового момента дается выражением

$$M^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = r^2 p^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})^2, \quad (25)$$

в котором использовано тождество Лагранжа. В случае центрального силового поля эта величина является интегралом движения.

В волновой механике величины M_x , M_y , M_z заменяются операторами

$$(M_x)_{\text{опер}} = -\frac{\hbar}{2\pi i} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) = -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \varphi_x}, \dots, \quad (26)$$

где φ_x, \dots — углы поворота вокруг осей Ox, \dots . Любой из операторов M_k , как нетрудно убедиться, имеет собственные значения $m(\hbar/2\pi)$ и нормированные собственные функции $(1/\sqrt{2\pi})\exp(-im\varphi_k)$.

На основании общих принципов волновой механики отсюда можно сделать вывод, что при точном измерении любой составляющей орбитального момента всегда должно получаться целое кратное число $\hbar/2\pi$. Поэтому данное число можно рассматривать как квантовую единицу углового момента.

Итак, мы видим, что представление момента вращения в виде вектора оказывается обманчивым в квантовой теории. В самом деле, три составляющие орбитального момента в общем случае не могут быть измерены одновременно, так как операторы M_x, M_y, M_z не коммутируют между собой. Если точно измерить одну из составляющих вектора \mathbf{M} в декартовой системе координат, то точные значения двух других его составляющих останутся неизвестными; будет известно лишь распределение вероятностей возможных значений этих составляющих. Поэтому нельзя точно задать вектор \mathbf{M} , так как точно известна может быть лишь одна из его составляющих. В самом деле, три ортогональные составляющие вектора \mathbf{M} , очевидно, не могут быть одновременно целыми кратными числу $\hbar/2\pi$ при любой ориентации осей декартовой системы координат.

Легко доказать, что операторы M_x, M_y, M_z не коммутируют между собой. Действительно,

$$[M_x, M_y] = \frac{\hbar}{2\pi i} M_z, \dots \quad (27)$$

Эти соотношения потребуются нам в дальнейшем.

Величине M^2 , фигурирующей в классической механике, в волновой механике ставится в соответствие оператор

$$\begin{aligned} (M^2)_{\text{опер}} &= (M_x^2)_{\text{опер}} + (M_y^2)_{\text{опер}} + (M_z^2)_{\text{опер}} = \\ &= \frac{\hbar^2}{4\pi^2} \frac{2}{\sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right], \end{aligned} \quad (28)$$

для которого мы написали выражение в сферической системе координат. Оператор $(M^2)_{\text{опер}}$ с точностью до множителя $\hbar^2/4\pi^2$ совпадает с лапласианом на сфере единичного радиуса.

Уравнение на собственные значения

$$(M^2)_{\text{опер}} f = \alpha f \quad (29)$$

на сфере единичного радиуса допускает в качестве конечных гладких и непрерывных решений лишь функции Лапласа $Y_k(\theta, \varphi)$. Собственные значения, со-

ответствующие функциям Y_l , где l — целое положительное число или нуль, равны $(\hbar^2/4\pi^2) l(l + 1)$. Следовательно, собственные значения оператора M^2 таковы:

$$M^2 = \frac{\hbar^2}{4\pi^2} l(l + 1), \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (30)$$

Как нетрудно убедиться, оператор M^2 коммутирует с операторами M_x , M_y и M_z . Это означает, что можно одновременно измерить M^2 и одну из компонент вектора \mathbf{M} .

Глава VI

Коммутируемость квантовомеханических операторов

1. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ

Рассмотрим два квантовомеханических оператора A и B . В общем случае они не коммутируют между собой, т.е. $AB \neq BA$. В частном случае может оказаться, что $AB = BA$. Мы сейчас покажем, что в волновой механике коммутируемость операторов, сопоставляемых двум физическим величинам, имеет большое значение. Это вытекает из следующей теоремы: необходимым и достаточным условием того, чтобы два линейных эрмитовых оператора A и B имели одну и ту же систему собственных функций, является равенство $AB \equiv BA$.

При строгом доказательстве этой теоремы необходимо различать три случая: 1) оба оператора полные; 2) один из них полный, а другой неполный; 3) оба оператора неполные. В этих трех случаях доказательства и даже формулировки теоремы слегка различаются.

Случай 1. Оба оператора полные.

Теорема. Необходимым и достаточным условием того, чтобы два полных оператора A и B имели одну и ту же систему собственных функций, является их коммутируемость.

Предположим сначала, что два оператора имеют одну и ту же систему собственных функций $\varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots$. Тогда при любом i имеем $A\varphi_i = \alpha_i\varphi_i$, $B\varphi_i = \beta_i\varphi_i$, откуда следуют равенства $BA\varphi_i = \alpha_i B\varphi_i = \alpha_i\beta_i\varphi_i$ и $AB\varphi_i = \beta_i A\varphi_i = \beta_i\alpha_i\varphi_i$. Таким образом, $AB\varphi_i = BA\varphi_i$ для всех φ_i . Поскольку функции φ_i образуют полную систему, выполняется равенство $ABf = B Af$, где f — любая функция, допускающая разложение по базисным функциям φ_i . Отсюда следует, что $AB \equiv BA$ и сформулированное условие является необходимым.

Покажем, что оно является также и достаточным. Для этого предположим, что $AB \equiv BA$. Если φ_i — собственные функции оператора A , а χ_i — оператора B , то $A(\varphi_i) = \alpha_i\varphi_i$ и $B(\chi_i) = \beta_i\chi_i$. Из первого равенства следует, что $BA\varphi_i = \alpha_i B\varphi_i = AB\varphi_i$ (поскольку $BA = AB$). Поэтому $B\varphi_i$ есть собственная функция оператора A , принадлежащая собственному значению α_i . Предположим сначала, что собственное значение α_i не вырождено. Тогда функция $B\varphi_i$ должна быть пропорциональна φ_i , откуда следует, что $B\varphi_i =$

$= C\varphi_i = \beta_i\varphi_i$, где C — константа. Но φ_i есть конечная, гладкая и непрерывная функция в области D , обращающаяся в нуль на ее границах. Поэтому из последнего равенства следует, что она есть собственная функция оператора B . Таким образом, все собственные функции оператора A являются собственными функциями оператора B при условии, что все α_i не вырождены. Действуя оператором A на обе части равенства $B(\chi_i) = \beta_i\chi_i$, таким же путем покажем, что любая собственная функция оператора A является собственной функцией оператора B , если только ни одно из собственных значений β_i не является вырожденным. Поэтому, если все собственные значения α_i и β_i не вырождены, то система базисных функций φ_i совпадает с системой базисных функций χ_i , так что сформулированное условие оказывается и достаточным.

Доказательство теряет силу, если некоторые из собственных значений α_i и β_i являются вырожденными. Предположим, например, что одному из собственных значений α_i оператора A соответствует p собственных функций $\varphi_{i1}, \dots, \varphi_{ip}$. Согласно предыдущим рассуждениям, тогда мы имеем p соотношений вида $AB\varphi_{ij} = BA\varphi_{ij} = \alpha_i B\varphi_{ij}$. Отсюда можно сделать лишь тот вывод, что $B\varphi_{ij}$ является линейной комбинацией функций $\varphi_{i1}, \dots, \varphi_{ip}$, т.е. что $B\varphi_{ij} =$

$$= \sum_{k=1}^p c_{jk}^i \varphi_{ik},$$

где c_{jk}^i — комплексные постоянные. Эти p функций $B\varphi_{ij}$ должны линейно выражаться через p собственных функций χ_i оператора B . Но функции $B\varphi_{ij}$ линейно-независимы, а поэтому их нельзя представить в виде линейной комбинации функций χ_i , если их число меньше p . Если они выражаются через функции χ_i , число которых больше p , то χ_i не могут быть линейно независимыми. Поэтому $B\varphi_{ij}$ линейно выражаются через функции χ_i , число которых в точности равно p . Обратное, p функций χ_i линейно выражаются через p функций $B\varphi_{ij}$. Как и в случае вырождения, p собственных функций можно заменить p линейно-независимыми комбинациями. Тогда функции $B\varphi_{ij}$ можно заменить функциями χ_i , которые одновременно будут собственными функциями операторов A и B , принадлежащими собственному значению α_i . Аналогичные рассуждения справедливы и в том случае, если одно из значений β_i вырождено. Мы приходим к выводу, что собственные функции всегда можно выбрать таким образом, чтобы операторы A и B имели одну и ту же систему собственных функций. Итак, для случая 1 теорема полностью доказана.

Случай 2. Один из операторов полный, а другой неполный.

Теорема. Пусть оператор A — полный, а оператор B — неполный. Если эти операторы коммутируют, то каждая из собственных функций оператора A равна произведению функции оператора B на функцию переменных, не входящих в B . Обратное, если это соотношение выполняется, то операторы коммутируют.

Доказательство прямого утверждения. Предположим, что $AB \equiv BA$. Пусть оператор B зависит от переменных x, \dots и не зависит от переменных y, \dots . Далее, пусть собственными функциями оператора A являются функции $\varphi_i(x, y, \dots)$, а оператора B — функции $\chi_i(x, y, \dots)$. Тогда $A\varphi_i = \alpha_i\varphi_i$ и, следова-

тельно, $BA\varphi_i = \alpha_i B\varphi_i = AB\varphi_i$ (так как $AB = BA$). Нетрудно видеть, что если собственное значение α_i не вырождено, то $B\varphi_i$ должно быть пропорционально φ_i и $B\varphi_i = \beta\varphi_i$. Поэтому φ_i есть собственная функция оператора B . Но, поскольку система базисных функций χ_j является полной для переменных x, \dots , φ_i может быть собственной функцией оператора B лишь в том случае, если она равна функции χ_k с точностью до множителя, зависящего лишь от y . Другими словами,

$$\varphi_i(x, \dots, y, \dots) = f_{ik}(y, \dots)\chi_k(x, \dots), \quad (1)$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теряет силу, если у оператора A имеются вырожденные собственные значения. В этом случае собственному значению α_i соответствуют p линейно-независимых собственных функций $\varphi_{i1}, \dots, \varphi_{ip}$.

Пусть A' — полный оператор с невырожденными собственными значениями, коммутирующий с оператором B . Согласно доказанному выше, любую собственную функцию $\varphi'_i(x, \dots, y, \dots)$ оператора A' можно записать в виде $\varphi'_i(x, \dots, y, \dots) = f_{ik}(y, \dots)\chi_k(x, \dots)$. В силу изложенных выше рассуждений p собственных функций φ_{ij} должны линейно выражаться через p и только через p функций φ_i , и наоборот. Поэтому в наборе собственных функций оператора A p функций φ_{ij} можно заменить p функциями φ'_i . Мы видим, что и в случае вырожденных собственных значений α_i , пользуясь неопределенностью в задании соответствующих собственных функций, их всегда можно выбрать таким образом, чтобы теорема по-прежнему выполнялась.

Доказательство обратного утверждения. Предположим, что всякая собственная функция оператора A имеет вид

$$\varphi_i(x, \dots, y, \dots) = f_{ik}(y, \dots)\chi_k(x, \dots). \quad (2)$$

Из уравнения $A\varphi_i = \alpha_i\varphi_i$ получим

$$BA\varphi_i = \alpha_i B\varphi_i = \alpha_i f_{ik}(y, \dots)B\chi_k = \alpha_i f_{ik}\beta_k\chi_k = \alpha_i\beta_k\varphi_i.$$

Аналогично из уравнения

$$B\chi_k = \beta_k\chi_k$$

сначала получим

$$B(f_{ik}\chi_k) = \beta_k f_{ik}\chi_k,$$

а затем

$$AB(f_{ik}\chi_k) = \beta_k A(f_{ik}\chi_k) = \beta_k A(\varphi_i) = \beta_k\alpha_i\varphi_i.$$

Отсюда

$$AB(\varphi_i) = BA(\varphi_i), \quad (3)$$

Это отношение справедливо для всех функций, образующих полную систему. Поэтому $AB \equiv BA$, и обратная теорема доказана.

Отметим один важный момент, относящийся к формуле (2)

$$\varphi_i(x, \dots, y, \dots) = f_{ik}(y, \dots)\chi_k(x, \dots). \quad (2)$$

В общем случае одной собственной функции χ_k неполного оператора B соответствуют несколько собственных функций φ_i полного оператора A . Поэтому мы и приписываем функции $f_{ik}(y, \dots)$ два индекса, так как в общем случае одному значению k соответствуют несколько значений индекса i . Другими словами, не существует взаимно однозначного соответствия между функциями операторов A и B ; первых намного больше, чем вторых. Примером такого оператора может служить оператор Гамильтона H для сферически-симметричной системы, такой, как атом водорода, причем в качестве оператора B можно взять неполный оператор M_z .

В сферической системе координат с выделенной осью Oz имеем $(M_z)_{\text{опер}} = -(\hbar/2\pi i)\partial/\partial\varphi$. Запишем уравнение на собственные значения оператора H :

$$-\frac{\hbar^2}{8\pi_2 m} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \varphi_i + V(r)\varphi_i = E_i \varphi_i. \quad (4)$$

Положив $\varphi_i = f(r, \theta)\chi(\varphi)$, легко найдем, что собственные функции оператора $A = H$ имеют вид

$$\varphi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = f_{nl}(r, \theta) e^{im\varphi},$$

где n, l, m — квантовые числа; в частности, m — целое число, положительное или отрицательное.

Собственными функциями оператора $B = M_z$ являются гладкие решения уравнения на собственные значения

$$-\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} = \beta \chi.$$

Они имеют вид

$$\chi_m(\varphi) = e^{-im\varphi} \quad (m \text{ — целое число}),$$

а соответствующие собственные значения равны $\beta_m = \hbar m/2\pi$. Отсюда видно, что наша теорема выполняется. Заданному значению целого числа m соответствует собственная функция χ_m оператора M_z и наряду с этим некая совокупность собственных функций оператора H , равных функциям χ_m , умноженным на функции $f_{nl}(r, \theta)$, и соответствующих различным возможным значениям n и l .

Здесь можно сделать еще одно замечание, в некотором смысле противоположное замечанию относительно формулы (2). Всякой собственной функции $\chi_k(x, \dots)$ оператора B соответствует по крайней мере одна пропорциональная

ей собственная функция $\varphi_i(x, \dots, y, \dots)$ оператора A . В самом деле, если входящие в φ_i значения y считать постоянными, то все функции φ_i , пропорциональные некоторому χ_k , будут эквивалентны между собой. Чтобы система функций φ_i , являющаяся полной для совокупности переменных x, \dots и y, \dots , оставалась полной и для переменных x, \dots , нужно, очевидно, чтобы по меньшей мере одна из функций φ_i с точностью до множителя сводилась к одной из функций χ_k при условии, что переменные y принимают постоянные значения. По этой причине всякой функции χ_k соответствует по меньшей мере одна функция φ_i вида $f_{ik}(y, \dots)\chi_k(x, \dots)$.

Случай 3. Оба оператора неполные.

Разделим переменные на четыре группы: 1) переменные x, \dots , которые входят в оператор A и не входят в B ; 2) переменные y, \dots , которые входят в A и в B ; 3) переменные z, \dots , которые входят только в оператор B ; 4) переменные u, \dots , которые не входят ни в A , ни в B . Обозначим через α_i и $\varphi_i(x, \dots, y, \dots)$ собственные значения и собственные функции оператора A , а через β_j и $\chi_j(y, \dots, z, \dots)$ — собственные значения и собственные функции оператора B . Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема. Если выполняется соотношение $AB \equiv BA$, то φ_i и χ_k связаны между собой соотношениями вида

$$\omega_j(x, \dots, y, \dots, z, \dots, u, \dots) = f_{ij}(z, \dots, u, \dots)\varphi_i(x, \dots, y, \dots) = g_{jk}(x, \dots, u, \dots)\chi_k(y, \dots, z, \dots), \quad (5)$$

где функции ω_j образуют полную систему для совокупности переменных $x, \dots, y, \dots, z, \dots, u, \dots$. Обратно, если указанные соотношения выполняются, то A и B коммутируют между собой.

Доказательство прямого утверждения. Предположим, что $AB = BA$. Пусть C — эрмитов оператор, зависящий лишь от переменных u, \dots . Очевидно, что этот оператор коммутирует с A и B . Рассмотрим далее оператор ABC . Это — полный оператор, коммутирующий как с C , так и с A и B , ибо по предположению A коммутирует с B . При этом оператор ABC эрмитов, поскольку он представляет собой произведение коммутирующих эрмитовых операторов. Применяя теорему случая 2 к операторам ABC и A и обозначая через $\omega_j(x, \dots, y, \dots, z, \dots, u, \dots)$ собственные функции оператора ABC , образующие полную систему для всех переменных, получаем

$$\omega_j(x, \dots, y, \dots, z, \dots, u, \dots) = f_{ji}(z, \dots, u, \dots)\varphi_i(x, \dots, y, \dots). \quad (6)$$

Применяя ту же самую теорему к операторам ABC и B , таким же путем будем иметь

$$\omega_j(x, \dots, y, \dots, z, \dots, u, \dots) = g_{jk}(x, \dots, u, \dots)\chi_k(y, \dots, z, \dots). \quad (7)$$

Тем самым доказано соотношение (5). Возвращаясь к замечаниям, сделанным в конце случая 2, мы можем сказать, что всякая функция φ_i удовлетворяет по меньшей мере одному из соотношений вида (5) и что то же самое справедливо для всякой функции χ_k .

Доказательство обратного утверждения. Предположим, что соотношения (5) выполняются и функции ω_j образуют полную систему. Тогда

$$A(\omega_j) = A(f_{ji}\varphi_i) = \alpha_i f_{ji}\varphi_i = \alpha_i \omega_j$$

и, следовательно,

$$BA(\omega_j) = \alpha_i B(\omega_j) = \alpha_i B(g_{ik}\chi_k) = \alpha_i \beta_k \omega_j.$$

Таким же образом

$$B(\omega_j) = B(g_{jk}\chi_k) = \beta_k g_{jk}\chi_k = \beta_k \omega_j$$

и, следовательно,

$$AB(\omega_j) = \beta_k A(\omega_j) = \beta_k A(f_{ji}\varphi_i) = \beta_k \alpha_i \omega_j.$$

Поэтому

$$AB(\omega_j) = BA(\omega_j),$$

а поскольку функции ω_j образуют полную систему, мы имеем $AB = BA$, что и требовалось доказать.

Интересен случай, когда отсутствуют переменные типа u , т.е. нет переменных, которые входили бы одновременно в оператор A и в оператор B . В этом случае будем говорить, что операторы A и B независимы, причем, разумеется, они коммутируют. Если через $\lambda_l(u)$ обозначить собственные функции оператора C , введенного выше, то всевозможные произведения

$$\varphi_i(x, \dots)\chi_k(z, \dots)\lambda_l(u, \dots)$$

являются собственными функциями оператора ABC и мы имеем¹⁾

$$\omega_j(x, \dots, z, \dots, u, \dots) = \varphi_i(x, \dots)\chi_k(z, \dots)\lambda_l(u, \dots). \quad (8)$$

Это означает, что в формуле (5)

$$f_{ji}(z, \dots, u, \dots) = \chi_k(z, \dots)\lambda_l(u, \dots),$$

$$g_{jk}(x, \dots, u, \dots) = \varphi_i(x, \dots)\lambda_l(u, \dots).$$

Отметим также, что оператор C , введенный в предыдущем доказательстве, совершенно произволен и потому должен зависеть лишь от переменных u . В связи с этим, если A и B коммутируют, то соотношения (5) могут быть записаны бесконечно большим числом способов, что соответствует произволу в выборе оператора C .

¹⁾ При конспективном стиле изложения автора в отдельных формулах не указываются все необходимые индексы в обеих частях равенства, что, конечно, не должно смутить читателя. — *Прим. перев.*

2. СЛЕДСТВИЯ ДОКАЗАННЫХ ТЕОРЕМ

Первое важное следствие доказанных выше теорем формулируется так: если два полных оператора A и B коммутируют, то, взяв за базисные функции их общие собственные функции φ_i , мы можем одновременно привести матрицы A и B к диагональному виду.

В самом деле, два коммутирующих (по предположению) оператора A и B имеют одну и ту же систему собственных функций φ_i , для которых

$$A\varphi_i = \alpha_i\varphi_i, \quad B\varphi_k = \beta_k\varphi_k.$$

Матричный элемент с индексами i, k , соответствующий оператору A в системе базисных функций φ_i , имеет вид

$$a_{ik} = \int_D \varphi_i^* A \varphi_k d\tau = \alpha_k \int_D \varphi_i^* \varphi_k d\tau = \alpha_k \delta_{ik},$$

а аналогичный элемент с индексами i, k для матрицы, соответствующей оператору B , равен

$$b_{ik} = \int_D \varphi_i^* B \varphi_k d\tau = \beta_k \int_D \varphi_i^* \varphi_k d\tau = \beta_k \delta_{ik}.$$

Из приведенных формул прямо следует, что если две матрицы A и B приведены к диагональному виду, то их диагональные элементы являются собственными значениями операторов A и B .

Обратно, если для некоторого выбора базисных функций φ_i матрицы A и B , соответствующие полным операторам A и B , принимают диагональный вид, то эти операторы коммутируют.

В самом деле, в этом случае по предположению

$$\int_D \varphi_i^* A \varphi_k d\tau = a_k \delta_{ik}, \quad \int_D \varphi_i^* B \varphi_k d\tau = b_k \delta_{ik}. \quad (9)$$

Поэтому в системе базисных функций φ_k все компоненты Фурье функций $A\varphi_k$ и $B\varphi_k$ равны нулю, кроме компонент с индексом k , которые совпадают с a_k и b_k . Поэтому

$$\begin{aligned} A\varphi_k &= a_k\varphi_k, \\ B\varphi_k &= b_k\varphi_k. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, функции φ_k являются одновременно собственными функциями операторов A и B , в связи с чем по основной теореме $AB \equiv BA$.

Рассуждения, которые мы только что провели, можно без труда обобщить на случай, когда по крайней мере один из операторов A и B неполон. Мы рассмотрим здесь лишь случай двух неполных операторов. Для него следствие формулируется следующим образом: если два неполных оператора A и B коммутируют между собой, то путем соответствующего выбора системы базисных функций матрицы A и B можно привести к диагональному виду.

В самом деле, возьмем в качестве полной системы базисных функций, использованной при доказательстве случая 3, систему собственных функций оператора C , которые зависят от переменных, не входящих ни в A , ни в B . Так как A и B по предположению коммутируют, выполняется соотношение (5) и, следовательно, верна формула

$$a_{ik} = \int_D \omega_i^* A \omega_k d\tau = \int_D \omega_i^* f_{kl}(z, \dots, u, \dots) A \varphi_l d\tau = \alpha_l \int_D \omega_i^* \omega_k d\tau = \alpha_l \delta_{ik}. \quad (11)$$

Аналогично

$$b_{ik} = \int_D \omega_i^* B \omega_k d\tau = \int_D \omega_i^* g_{kj}(x, \dots, u, \dots) B \chi_j d\tau = \beta_j \int_D \omega_i^* \omega_k d\tau = \beta_j \delta_{ik}, \quad (12)$$

чем и доказывается наше утверждение.

Обратно, если путем специального выбора базисных функций можно одновременно привести матрицы к диагональному виду, то неполные операторы A и B коммутируют между собой.

Действительно, предположим, что можно найти такую полную систему функций ω_i , зависящих от всех переменных $x, \dots, y, \dots, z, \dots, u, \dots$, что

$$\int_D \omega_i^* A \omega_k d\tau = a_k \delta_{ik}; \quad \int_D \omega_i^* B \omega_k d\tau = b_k \delta_{ik}.$$

Тогда все составляющие функций $A \omega_k$ и $B \omega_k$, рассматриваемые в системе базисных функций ω_i , будут равны нулю, кроме функций с индексом k , откуда

$$A \omega_k = a_k \omega_k, \quad B \omega_k = b_k \omega_k. \quad (13)$$

Таким образом, функции ω_k являются одновременно собственными функциями операторов A и B . Пользуясь свободой в выборе собственных функций операторов A и B для вырожденного случая, эти функции можно выбрать пропорциональными одновременно собственным функциям оператора A и оператора B , что дает возможность положить

$$\begin{aligned} \omega_j(x, \dots, y, \dots, z, \dots, u, \dots) &= f_{jk}(z, \dots, u, \dots) \varphi_k(x, \dots, y, \dots) = \\ &= g_{jl}(x, \dots, u, \dots) \chi_l(y, \dots, z, \dots). \end{aligned}$$

Отсюда из доказательства обратного утверждения в случае 3 следует, что A и B коммутируют.

Из сказанного выше естественным образом вытекает, что если два оператора A и B не коммутируют между собой, то соответствующие матрицы нельзя одновременно привести к диагональному виду. Это позволяет доказать следующую изящную теорему.

Теорема. Если два оператора F_1 и F_2 коммутируют с третьим полным оператором A , но не коммутируют между собой, то у оператора A должны быть вырожденные собственные значения.

В самом деле, поскольку A и F_1 коммутируют между собой, систему соб-

ственных функций оператора A можно выбрать таким образом, чтобы матрицы A и F_1 одновременно приводились к диагональному виду. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots$ — подобного рода система собственных функций. Аналогично если A и F_2 коммутируют, то можно найти такую систему собственных функций оператора A , которую мы обозначим через $\varphi'_1, \dots, \varphi'_i, \dots$, что, будучи взяты в качестве базисной системы, они дадут возможность одновременно привести матрицы A и F_2 к диагональному виду. Но если оператор A не имеет вырожденных собственных значений, то система таких собственных функций определяется однозначно и функции φ'_i совпадают с функциями φ_i . Значит, путем выбора одной и той же системы базисных функций можно было бы одновременно привести к диагональному виду матрицы A , F_1 и F_2 . Но это невозможно, так как по предположению операторы F_1 и F_2 не коммутируют между собой. Следовательно, оператор A должен иметь вырожденные собственные значения.

В качестве примера применения этой теоремы рассмотрим сферически-симметричную систему, гамильтониан H которой зависит только от расстояния r до начала системы координат. Как мы видели, операторы M_x и M_y , соответствующие составляющим углового момента по осям Ox и Oy , не коммутируют между собой. Но, как нетрудно убедиться, эти неполные операторы оба коммутируют с оператором H . Отсюда следует, что у оператора H имеются вырожденные собственные значения. Поэтому вырожденность квантовых состояний сферически-симметричной системы — хорошо известный результат квантовой теории.

Операторы, у которых имеется общая собственная функция

Рассмотрим два оператора A и B , имеющие общую собственную функцию φ . Тогда $A(\varphi) = \alpha\varphi$, $B\varphi = \beta\varphi$, откуда

$$(AB - BA)\varphi \equiv [A, B]\varphi = \beta A\varphi - \alpha B\varphi = 0. \quad (14)$$

Но полученное равенство $[A, B]\varphi = 0$ может выполняться лишь в следующих двух случаях.

1. $[A, B] = 0$. В этом случае операторы A и B коммутируют между собой и имеют целый набор общих собственных функций, в число которых входит функция φ .

2. $[A, B] \neq 0$, но оператор $[A, B]$ имеет собственное значение, равное нулю. Тогда операторы A и B , хотя они и не коммутируют, все-таки могут обладать по меньшей мере одной общей собственной функцией φ , если последняя является собственной функцией оператора $[A, B]$, принадлежащей собственному значению 0.

В качестве примера случая 2 снова рассмотрим операторы M_x и M_y . Имеем

$$[M_x, M_y] = \frac{\hbar}{2\pi i} M_z \neq 0.$$

Хотя эти операторы не коммутируют между собой, оператор M_z имеет

собственные значения $m(\hbar/2\pi)$ с $m = 0, 1, 2, \dots$, т.е. у него имеется собственное значение, равное нулю. Поэтому и коммутатор $[M_x, M_y]$ имеет собственное значение, равное нулю. Операторы M_x и M_y имеют общую собственную функцию $\varphi = \text{const}$, в чем нетрудно убедиться: $\varphi = \exp(-im\varphi_x)/\sqrt{2\pi}$ при $m = 0$.

Важное значение имеет случай, когда оператор $[A, B]$ равен постоянной, умноженной на единичный оператор. К этому случаю относятся канонически сопряженные величины, для которых

$$[A, B] = \frac{\hbar}{2\pi i} \cdot 1.$$

Поскольку единичная матрица, очевидно, не имеет нулевого собственного значения, у операторов A и B не может быть общей собственной функции.

Отметим, что все изложенное справедливо и в случае непрерывного спектра.

3. ОДНОВРЕМЕННОЕ ИЗМЕРЕНИЕ ДВУХ ВЕЛИЧИН В ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКЕ

Основываясь на доказанных выше теоремах и на их следствиях, рассмотрим вопрос об одновременном измерении двух величин.

В новой механике всякой физической величине ставится в соответствие эрмитов оператор. Если имеются некая физическая величина и соответствующий ей оператор A , то очень важно различать величины, операторы которых коммутируют с оператором A , и величины, операторы которых не коммутируют с оператором A . Важность такого различия вытекает из того, что две механические величины могут быть одновременно измерены в том и только в том случае, если их операторы коммутируют. Именно это мы и собираемся сейчас доказать.

Будем исходить из принципиально важного постулата квантовой механики о том, что всякое состояние частицы или системы частиц в любой момент времени должно характеризоваться волновой функцией ψ , которая на самом деле характеризует то, что нам известно об этой частице или системе. Любая операция измерения или наблюдения, проводимая над микроскопической системой, изменяет состояние наших знаний о частице или системе и потому резко изменяет форму функций ψ . Однако состояние частицы должно характеризоваться волной ψ не только *до измерения*, но и *после* него — вот фундаментальный постулат волновой механики, который необходимо отметить. Сразу же *после измерения* или наблюдения, которые дают нам некоторые сведения о состоянии атомной системы, недоступной нашему непосредственному восприятию, мы можем приписать волне ψ некоторую форму, характеризующую состояние наших знаний. Если начиная с этого момента никаких других наблюдений или измерений не делается, то волна ψ меняет первоначальную форму в соответствии с основным уравнением волновой механики, причем это изменение строго детерминировано.

Если спустя некоторое время новое измерение или наблюдение дает нам для физической величины A точное значение α_i , то в силу наших общих принципов это значение будет одним из собственных значений оператора A , а волновая функция ψ после измерения должна быть пропорциональна собственной функции φ_i , соответствующей собственному значению α_i . Если мы сразу же повторим измерение величины A , то из общих соображений можно сказать, что мы снова получим числовое значение α_i (повторимость измерения). Поэтому, чтобы можно было одновременно точно измерить физическую величину A и другую величину B с собственным значением β_i и собственной функцией χ_i , необходимо, чтобы после измерения волновая функция ψ была одновременно пропорциональна одной из функций φ_i и одной из функций χ_i . В противном случае представление наших знаний после измерения с помощью некой волновой функции ψ было бы невозможным.

Применим эти рассуждения сначала к двум *полным* операторам A и B . Чтобы соответствующие величины можно было точно измерить, необходимо, чтобы после измерения выполнялось соотношение $\psi = a_i \varphi_i = b_i \chi_i$, где $|a_i| = |b_i| = 1$. Тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между α_i и β_i (соответствие между величинами α и β с одинаковыми индексами). Таким образом, система φ_i должна совпадать с системой χ_i , а мы знаем, что необходимым и достаточным условием для этого является выполнение соотношения $AB = BA$. Точное и одновременное измерение физических величин A и B возможно лишь в том случае, если сопоставляемые им операторы коммутируют между собой. В этом случае результаты измерения двух величин взаимосвязаны: зная один из них, мы знаем и другой, по крайней мере в отсутствие вырожденных собственных значений.

Рассмотрим далее случай, когда оператор A полный, а B — неполный (случай 2, с. 90). Мы хотим, чтобы после измерения выполнялось соотношение $\psi = a_i \varphi_i = f_{ik}(y, \dots) \chi_k(x, \dots)$, где

$$|a_i| = 1, \int \dots \int |f_{ik}|^2 dy = 1$$

при любых значениях i . Необходимое и достаточное условие для этого по-прежнему имеет вид $AB = BA$. Но в этом случае два одновременных измерения не всегда полностью взаимосвязаны, ибо, как мы видели, одному значению k может соответствовать несколько значений i . Поэтому, зная результат β_k измерения B , мы, вообще говоря, не можем сказать, каково значение α_i наблюдаемой A .

Рассмотрим теперь случай, когда оба оператора A и B неполные. Воспользуемся здесь обозначениями случая 3 (с. 93). Чтобы наблюдаемые A и B можно было точно одновременно измерить, после измерения должно выполняться равенство

$$\psi = f_{ji}(z, \dots, u, \dots) \varphi_i(x, \dots, y, \dots) = g_{jk}(x, \dots, u, \dots) \chi_k(z, \dots, y, \dots) \quad (15)$$

(при любых значениях индекса i) с дополнительными условиями

$$\int \dots \int |f_{ji}(z, \dots, u, \dots)|^2 du dz = 1, \quad (16)$$

$$\int \dots \int |g_{ik}(x, \dots, u, \dots)|^2 du dx = 1.$$

Согласно доказанному выше в случае 3 (с. 93), необходимым и достаточным условием этого является равенство $AB = BA$. Здесь два измерения связаны между собой слабее, чем в предыдущем случае, поскольку может существовать несколько значений индекса j , соответствующих одному и тому же значению i , и несколько значений j , соответствующих одному и тому же значению k . Зная результат одного измерения, вообще говоря, нельзя сказать, каков будет результат другого.

Наконец, предположим, что A и B — независимые операторы. Тогда они должны коммутировать между собой, и, добавив к ним оператор C , зависящий от переменных, не содержащихся в A и B , мы получим полную систему базисных функций всех переменных, взяв для этого собственные функции ω_j полного оператора ABC . После измерения функция ψ может свестись к одной из функций ω_j , т.е. принять вид

$$\psi = c_j \omega_j = c_j \lambda_l(u, \dots) \varphi_i(x, \dots) \chi_k(v, \dots), \quad (17)$$

где $|c_j| = 1$, а i, k, l принимают любые целые значения. Это означает, что физические величины A и B всегда можно измерить одновременно и что результаты двух одновременных измерений совершенно независимы. Зная результат одного из них, мы ничего не можем сказать о результате другого.

Итак, необходимым и достаточным условием одновременной измеримости двух физических величин A и B является коммутруемость соответствующих им операторов. Результаты одновременного измерения A и B , если последнее возможно, в большей или меньшей степени связаны между собой в зависимости от того, полные операторы или неполные.

Соображения, относящиеся к случаю независимых операторов, приводят нас к понятию «максимального измерения». Предположим, что частица или система частиц характеризуется n координатами x_1, \dots, x_n . Каждой координате x_i поставим в соответствие измеряемую величину, оператор которой A_i зависит лишь от переменной x_i . Пусть $\alpha_k^{(i)}$ и $\varphi_k^{(i)}$ — собственные значения и собственные функции оператора A_i .

Перемножением всех A_i образуем полный оператор $\prod_{i=1}^n A_i$. Его собственными функциями будут произведения

$$\omega_j = \prod_{i=1}^n \psi_j^{(i)}(x_i).$$

Поскольку операторы A_i независимы, соответствующие величины одновременно измеримы. Предположим, что мы определили все эти величины в результате одного акта измерения. После такого измерения функция ψ будет иметь вид

$$\omega_j = \prod_{i=1}^n \varphi_j^{(i)}(x_i).$$

где предполагается, что измерение величины A_i дало собственное значение $\alpha_k^{(i)}$, соответствующее собственной функции $\varphi_k^{(i)}$. В таком случае говорят, что произведено «максимальное» измерение, полностью определяющее функцию ψ и, следовательно, вероятности всевозможных значений всех измеряемых функций, сопоставляемых системе. Измерение другой физической величины B одновременно с величинами A_i либо невозможно, если оператор B не коммутирует с произведением операторов A_i , либо возможно (если он коммутирует). Но последний случай не представляет интереса, поскольку это дополнительное измерение ничего нового не добавит к описанию состояния системы, «максимальную» информацию о которой уже дало нам одновременное измерение всех A_i .

4. ПРИМЕРЫ ВЕЛИЧИН, КОТОРЫЕ НЕ МОГУТ БЫТЬ ИЗМЕРЕНЫ ОДНОВРЕМЕННО. ДВА ВИДА НЕКОММУТИРУЕМОСТИ

Наиболее известный пример двух величин, которые не могут быть измерены одновременно, — координата q и сопряженный ей импульс p . Обозначив через Q и P соответствующие операторы, можем написать

$$Q = q \times, \quad P = -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q}, \quad QP - PQ = \frac{\hbar}{2\pi i}, \quad (18)$$

поскольку

$$q \left(-\frac{\hbar}{2\pi i} \right) \frac{\partial f(q)}{\partial q} - \left(-\frac{\hbar}{2\pi i} \right) \frac{\partial [qf(q)]}{\partial q} = \frac{\hbar}{2\pi i} f(q).$$

Следовательно, величины q и p невозможно измерить одновременно. Если имеется несколько величин q , например q_1, \dots, q_i, \dots , то, разумеется, $Q_k P_i = P_i Q_k$, и поскольку

$$Q_i Q_k = Q_k Q_i, \quad P_i P_k = P_k P_i,$$

две координаты или две компоненты импульса так же, как и координата и не сопряженная ей компонента импульса, всегда могут быть измерены одновременно. Невозможно лишь одновременно измерить координату и соответствующую ей компоненту импульса.

В случае частицы, характеризуемой тремя координатами x, y, z , которым сопряжены три составляющие импульса p_x, p_y, p_z , мы снова приходим к невозможности одновременно знать сопряженные величины x и p_x и т.д., которые ранее мы могли вычислить, исходя из представления волны ψ в виде интегралов Фурье. Из соотношения

$$QP - PQ = \frac{\hbar}{2\pi i}$$

следуют соотношения неопределенностей Гейзенберга, к которым мы еще вернемся в дальнейшем. Вообще если в какой-либо механической задаче p и q — канонически сопряженные переменные, то всегда

$$QP - PQ = \frac{h}{2\pi i}.$$

Так, угол поворота вокруг оси Oz канонически сопряжен составляющей M_z углового момента. Поскольку величине M_z соответствует оператор $-(h/2\pi i)(\partial/\partial\varphi_z)$, мы имеем операторное соотношение

$$\varphi M_z - M_z \varphi = \frac{h}{2\pi i}.$$

В только что рассмотренном случае два некоммутирующих оператора таковы, что для них $[A, B] = c$, где c — постоянная, равная $h/2\pi i$. Канонически сопряженные величины относятся к общей категории одновременно неизмеряемых величин, коммутатор которых равен постоянной. Но имеется также другая категория одновременно неизмеряемых величин, коммутатор которых равен отличному от нуля оператору.

К такому случаю относятся, например, величины M_x и M_y , поскольку

$$[M_x, M_y] = \frac{h}{2\pi i} M_z.$$

Существенное различие между некоммутирующими операторами данного и рассмотренного ранее вида вытекает из теоремы, сформулированной на с. 96. Дело в том, что два некоммутирующих оператора A и B не могут иметь общей собственной функции, если их коммутатор равен постоянной c , поскольку у оператора $c \cdot 1$ нет нулевых собственных значений. Физические величины, соответствующие двум таким операторам, никогда не могут быть измерены одновременно.

Если же коммутатор двух некоммутирующих величин равен оператору, то A и B могут обладать общими собственными функциями, если только у оператора $[A, B]$ имеются нулевые собственные значения. Тогда величины A и B могут оказаться одновременно измеримыми, и такое измерение даст для них значения, равные собственным значениям одной из общих собственных функций. Например, поскольку в случае наблюдаемых M_x и M_y их коммутатор $[M_x, M_y] \sim M_z$ имеет собственное значение 0, соответствующее собственной функции $\varphi_0 = \text{const} = 1/\sqrt{2\pi}$, в виде исключения возможно одновременное измерение величин M_x и M_y , которое даст для них значения $M_x = 0$ и $M_y = 0$, соответствующие тоже собственной функции $\varphi_0 = 1/\sqrt{2\pi}$. В общем же случае одновременное измерение величин M_x и M_y невозможно¹⁾.

¹⁾ В действительности в цилиндрической системе координат Oz собственная функция оператора M_z , соответствующая собственному значению 0, имеет вид $f(\rho + z)$ и аналогичные выражения справедливы для собственных функций операторов M_x и M_y . Поэтому собственной функцией, общей для операторов M_x , M_y , M_z и соответствующей собственному значению 0, является функция $F(r) = F(\rho^2 + z^2)$; она характеризует сферически-симметричное состояние. — Л. Б.

Когда мы дойдем до теоремы о дисперсии двух величин с некоммутирующими операторами, мы снова увидим необходимость различать некоммутирующие величины с коммутатором, равным постоянной, и с коммутатором, равным некоему оператору.

Замечание. Если $[A, B] = c \cdot 1$, то постоянная c всегда пропорциональна постоянной \hbar , поскольку при $\hbar \rightarrow 0$ операторы A и B должны коммутировать, ибо данный предельный переход есть переход к классической механике. Примером и здесь может служить случай канонически сопряженных величин.

Глава VII

Физическая невозможность одновременного измерения канонически сопряженных величин

1. ЗНАЧЕНИЕ ВОПРОСА О НЕВОЗМОЖНОСТИ ОДНОВРЕМЕННОГО ТОЧНОГО ИЗМЕРЕНИЯ ДУХУ КАНОНИЧЕСКИ СОПРЯЖЕННЫХ ВЕЛИЧИН

Как было показано выше, согласно положениям волновой механики, невозможно одновременно точно измерить две некоммутирующие наблюдаемые, в частности две канонически сопряженные величины. Это оказывается следствием фундаментального постулата о том, что состояние наших знаний о системе должно характеризоваться волновой функцией ψ как до, так и после измерения. Если бы две канонически сопряженные величины можно было одновременно измерить точно, то состояние системы после измерения нельзя было бы характеризовать волновой функцией ψ и от волновой механики пришлось бы отказаться.

Но можно поставить вопрос, действительно ли невозможно одновременно измерить две канонически сопряженные физические величины и какова физическая причина такой невозможности. Тонкий анализ, проведенный Бором и Гейзенбергом, показал, что на самом деле невозможно представить себе опыт, который позволил бы одновременно измерить две канонически сопряженные величины с точностью, превышающей ту, которую допускают соотношения неопределенностей Гейзенберга. Долгая дискуссия, зачинателями которой были Бор и Гейзенберг, закончилась в их пользу, и в настоящее время их утверждения, по-видимому, приняты всеми физиками, серьезно изучавшими данный вопрос.

Подобные исследования показывают также, что невозможность одновременного точного измерения двух канонически сопряженных величин обусловлена самим существованием кванта действия, характеризуемого постоянной Планка h .

Поскольку с макроскопической точки зрения постоянная Планка h пренебрежимо мала, в макроскопических явлениях одновременное измерение двух канонически сопряженных величин оказывается практически возможным, ибо в этом случае неточность измерения намного превышает квантовые неопределенности. Но в масштабе явлений, затрагивающих элементарные частицы, величины h пренебречь нельзя, а потому квантовые неопределенности играют существенную роль.

Рассмотрим некоторые из примеров, разобранных Бором и Гейзенбергом.

2. МИКРОСКОП ГЕЙЗЕНБЕРГА

Широко известный мысленный эксперимент, носящий название микроскопа Гейзенберга, состоит в том, что в оптический микроскоп наблюдают электрон, положенный на предметный столик. Конечно, такой эксперимент невозможен, но его можно представить так, что он будет более похож на опыты, осуществимые на практике.

Возьмем оптический или корпускулярный (электронный) микроскоп и будем рассматривать в него объект столь малой массы M , что его можно считать точечным, положенный на предметный столик микроскопа.

Объект «освещается» пучком частиц одинаковой энергии, падающих параллельно оси микроскопа. Если p — их импульс, то соответствующая длина волны равна $\lambda = h/p$. В оптическом микроскопе падающими частицами служат фотоны, а в корпускулярном — электроны (или, скажем, протоны).

Если микроскоп идеальный, т.е. свободен от aberrаций и дифракционных эффектов, то точечному объекту M будет соответствовать точечное изображение P в плоскости наблюдения π . Aberrации можно сделать очень малыми (в оптическом микроскопе путем соответствующего выбора линз, а в корпускулярном путем уменьшения угловой апертуры 2ε). Но никогда нельзя исключить дифракцию волны ψ , соответствующей частицам, на отверстии прибора, имеющем всегда конечные размеры. Теория разрешающей способности микроскопа показывает, что по положению изображения точки положение точечного источника на оси x можно определить лишь с точностью до $\delta x = (\lambda/2) \sin \varepsilon$. Если бы дифракции (и aberrаций) не было, то приход частицы в точку P (а это в принципе наблюдаемый эффект) позволил бы определить точное положение точки M . Однако принципиально неустранимая дифракция приводит к тому, что по факту попадания частицы в точку P можно установить положение точки M на оси x лишь с неопределенностью $\delta x = (h/2) \sin \varepsilon$. Как видим, эта неопределенность существует вне зависимости от интенсивности падающего пучка, поскольку она оказывается той же и в случае одной частицы, рассеиваемой на точечном объекте.

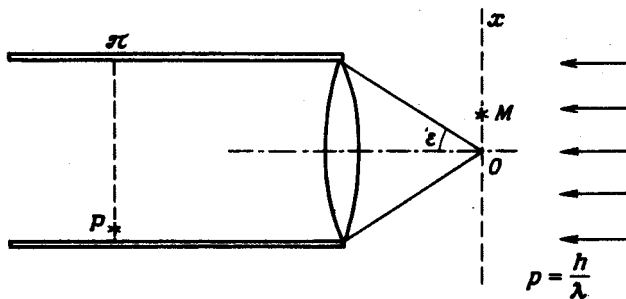


Рис. 2

Рассеяние падающих частиц на объекте является результатом кратковременного взаимодействия при столкновении частицы с объектом. В процессе такого взаимодействия обмен импульсами между движущейся частицей и первоначально неподвижным объектом должен быть малым, так как в противном случае волна, сопоставляемая с рассеиваемой частицей, характеризовалась бы длиной волны, отличной от длины волны падающей частицы, что привело бы к отсутствию правильного изображения. Для решения такой задачи следовало бы даже рассмотреть систему, состоящую из объекта и частицы, и перейти к конфигурационному пространству такой системы. В общем можно принять, что импульс $|p|$ рассеиваемой частицы равен $|p| = \hbar/\lambda$.

После столкновения рассеянная частица имеет импульс p' , образующий угол α с первоначальным направлением движения (оптической осью микроскопа). Чтобы рассеиваемая частица участвовала в процессе измерения, она должна по меньшей мере пройти через микроскоп, а для этого должно выполняться условие $|\alpha| < \varepsilon$. Пусть, наконец, P_x — x -составляющая импульса объекта после столкновения. Тогда можно написать закон сохранения этой составляющей импульса для системы, состоящей из объекта и падающей частицы, что дает

$$P_x = p' \sin \alpha \approx p \sin \alpha = (h/\lambda) \sin \alpha. \quad (1)$$

Поэтому P_x имеет значение, лежащее между

$$-\frac{h}{\lambda} \sin \varepsilon \quad \text{и} \quad +\frac{h}{\lambda} \sin \varepsilon.$$

Таким образом, неопределенность в величине P_x равна $(2h/\lambda) \sin \varepsilon$. Поэтому, обнаружив попадание частицы в точку P , наблюдатель будет знать ее координату x объекта и его составляющую импульса P_x лишь с неопределенностями

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2 \sin \varepsilon}, \quad \Delta P_x = 2(h/\lambda) \sin \varepsilon, \quad (2)$$

откуда $\Delta x \cdot \Delta P_x \geq h$.

Знак равенства относится здесь к идеальному случаю, когда нет aberrаций и т.д.

Итак, мы снова получили соотношение неопределенностей для сопряженных величин x и P_x . Мы видим, что по крайней мере в рассмотренном случае эти величины не могут быть определены с абсолютной точностью. Из проведенных рассуждений явствует, что данное обстоятельство обусловлено конечным значением постоянной h . Если мы хотим повысить точность определения величины x , то нужно уменьшить длину волны λ , взяв более быстрые падающие частицы. Но тогда (и как раз здесь проявляется конечная величина кванта действия) возрастет импульс $|p|$ падающей частицы, так как $|p| = \hbar/\lambda$, а h — конечная величина. Но тогда возрастет и ΔP_x , в связи с чем попрежнему будет справедливо соотношение Гейзенберга. Мы видим, что за со-

отношениями Гейзенберга кроется невозможность нарушения связи между δx и δP_x , обусловленной наличием кванта действия, а это заставляет думать, что такие соотношения должны всегда выполняться вне зависимости от взятого измерительного прибора.

3. ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ ЭЛЕКТРОНА ПО ЭФФЕКТУ ДОПЛЕРА

Рассмотрим теперь эксперимент, в котором скорость электрона измеряется по эффекту Доплера. Предположим, что электрон движется со скоростью v в положительном направлении оси Ox . На этот электрон направляется пакет световых волн со средней длиной волны λ , распространяющийся вдоль оси Ox в отрицательном направлении. Если происходит акт рассеяния, то рассеянный фотон может изменить свою скорость и начать двигаться вдоль оси Ox в положительном направлении. Предположим, что так и произошло и что мы можем точно измерить частоту ν' после рассеяния. Для простоты примем, что скорость электрона намного меньше скорости света, и напишем уравнения, выражающие законы сохранения энергии и импульса:

$$\begin{aligned} h\nu + \frac{m_0 v^2}{2} &= h\nu' + \frac{m_0 v'^2}{2}, \\ m_0 v - \frac{h\nu}{c} &= m_0 v' + \frac{h\nu'}{c}, \end{aligned} \quad (3)$$

где v' — конечная скорость электрона. Исключив v' из этих двух уравнений, получим

$$h(\nu - \nu') = \frac{1}{2m_0} \left(\frac{h^2}{c^2} (\nu + \nu')^2 - 2m_0 v \frac{h}{c} (\nu + \nu') \right). \quad (4)$$

Положим $\nu' = \nu - \varepsilon$ и учтем, что ε мало и, следовательно, величинами $\varepsilon(v/c)$ и ε^2 можно пренебречь, так же как и величиной $\varepsilon(h\nu/m_0 c^2)$, поскольку величина $h\nu/m_0 c^2 \sim 10^{-13}/10^{-6}$ тоже мала. Окончательно получаем

$$\varepsilon = 2 \frac{h\nu^2}{m_0 c^2} - 2 \frac{v}{c} \nu,$$

откуда следует формула

$$\nu' = \nu - \varepsilon = \nu \left(1 - \frac{2h\nu}{m_0 c^2} + \frac{2v}{c} \right). \quad (5)$$

Здесь в рассматриваемом приближении одновременно учтены эффект Доплера, характеризуемый членом $2v/c$, и эффект Комптона, описываемый членом $-2h\nu/m_0 c^2$. Эффект Комптона приводит к изменению скорости электрона. Поэтому если мы хотим точно измерить ее по эффекту Доплера, то необходи-

мо создать условия, при которых эффектом Комптона можно было бы пренебречь по сравнению с эффектом Доплера, откуда следует, что должна быть очень малой величина $(h\nu/m_0c^2)/(v/c) = h/m_0v\lambda$. В этом случае заметную роль будет играть лишь эффект Доплера, и мы можем положить

$$\nu' = \nu(1 + 2v/c), \quad \lambda' = \lambda(1 - 2v/c).$$

Но волновой пакет всегда имеет конечную длину l , а потому он не является строго монохроматическим. Если ввести волновое число $1/\lambda$, то оно будет различным для разных монохроматических составляющих волнового пакета. Из теории представлений волновых пакетов с помощью интегралов Фурье следует, что неопределенность $\delta(1/\lambda)$ будет равна $\sim 1/l$. Поэтому, если даже свести к нулю экспериментальные ошибки измерения величины λ' , останется неопределенность в значении ν , обусловленная тем, что

$$\nu = \frac{c}{2} \left(1 - \frac{\lambda'}{\lambda} \right).$$

Неопределенность в величине λ влечет за собой неопределенность в величине ν , равную

$$\delta\nu = \frac{c}{2} \lambda' \delta \left(\frac{1}{\lambda} \right).$$

В связи с этим неопределенность составляющей импульса электрона по оси Ox после измерения будет равна

$$\delta p_x \approx mc\lambda/2l. \quad (6)$$

Но результат одновременного измерения координаты тоже содержит некоторую неопределенность. В самом деле, хотя эффект Комптона и предполагается слабым по сравнению с эффектом Доплера, тем не менее он существует и, как мы видели, приводит к изменению скорости, равному $\nu' - \nu \approx -2h\nu/m_0c = -2h/m_0\lambda$. Предположим, что начальное положение частицы точно известно, т.е. что мы имеем самый благоприятный случай. Неопределенность положения после измерения обусловлена тем, что остается неизвестным, в какой именно момент из промежутка времени l/c , в течение которого волновой пакет проходит мимо электрона, происходит рассеяние. В результате неопределенность δx конечного положения электрона оказывается равной

$$\delta x = (\nu - \nu') \frac{l}{c} = \frac{2h}{m\lambda} \frac{l}{c}. \quad (7)$$

Поэтому даже в самом благоприятном случае

$$\delta x \cdot \delta p_x \approx \frac{mc\lambda}{2l} \frac{2h}{m\lambda} \frac{l}{c} = h,$$

и мы снова приходим к соотношению неопределенностей Гейзенберга.

4. ПРОХОЖДЕНИЕ ЧАСТИЦЫ ЧЕРЕЗ ПРЯМОУГОЛЬНУЮ ДИАФРАГМУ

В качестве еще одного примера рассмотрим опыт по определению положения частицы, проходящей через прямоугольное отверстие со сторонами $2a$ и $2b$ в плоском экране. Чтобы определить координаты частицы, придется уменьшать размеры отверстия, но чем меньше размеры отверстия, тем больше влияние дифракции, неизбежной при прохождении частицы через отверстие, согласно представлениям волновой механики.

Чтобы ввести четвертое соотношение неопределенностей, о котором мы еще не говорили и которое мы подробно рассмотрим позднее, предположим, что мы определяем момент прохождения частицы через отверстие, открывая на мгновение заслонку, которой оно закрыто. Чем меньше времени будет открыто отверстие, тем точнее будет определяться момент прохождения, но тем больше будет протяженность волнового пакета, сопоставляемого частице. В результате будет уменьшаться монохроматичность волнового пакета, т.е. увеличиваться неопределенность энергии частицы. Это и выражается четвертым соотношением неопределенностей:

$$\delta W \cdot \delta t \geq h.$$

Чтобы рассмотреть задачу математически, возьмем центр прямоугольного отверстия за начало системы координат, оси Ox и Oy проведем параллельно сторонам $2a$ и $2b$ прямоугольного отверстия, а ось z направим перпендикулярно плоскости отверстия и примем, что ее положительное направление совпадает с направлением распространения света. Пусть M — некая точка отверстия с координатами X , Y и 0 , а $dXdY$ — малый прямоугольник, окружающий эту точку. Как известно, элементарную волну, излучаемую малым прямоугольником $dXdY$ в направлении с направляющими косинусами α , β , γ , составляющим очень малый угол с осью Oz , можно найти на основании принципа Гюйгенса. Если x , y , z — координаты весьма удаленной точки, лежащей в указанном выше направлении α , β , γ , то рассматриваемая элементарная волна дается выражением

$$\delta\psi_{\alpha\beta} = K dX dY \exp \left[2\pi i \left(\nu t - \frac{\alpha(x - X) + \beta(y - Y) + z}{\lambda} \right) \right], \quad (8)$$

где K — коэффициент, который хотя и меняется с изменением направляющих косинусов α , β , γ , но гораздо медленнее, чем по экспоненциальному закону. Здесь мы положили $\gamma \approx 1$. Следовательно, полная волна, посылаемая в направлении α , β , γ , дается выражением

$$\psi_{\alpha\beta} = C \exp \left(2\pi i \left[\nu t - \frac{\alpha x + \beta y + z}{\lambda} \right] \right), \quad (9)$$

где

$$C = A + iB = \iint K \exp \left(2\pi i \frac{\alpha X + \beta Y}{\lambda} dX dY \right), \quad (10)$$

причем интеграл берется по прямоугольному отверстию. Если учесть симметрию отверстия, то мы получим, что $B = 0$, а выражение для C сводится к виду

$$C = A = \iint K \cos 2\pi \frac{\alpha X + \beta Y}{\lambda} dX dY. \quad (11)$$

Косинус можно представить в виде суммы произведения косинусов и произведения синусов, а интеграл произведения синусов равен нулю. Поэтому

$$A = 4K \int_0^a dX \cos \frac{2\pi\alpha X}{\lambda} \int_0^b dY \cos 2\pi \frac{\beta Y}{\lambda} = \frac{K\lambda^2}{\pi^2\alpha\beta} \operatorname{сип} \frac{2\pi\alpha a}{\lambda} \operatorname{сип} \frac{2\pi\beta b}{\lambda}, \quad (12)$$

откуда

$$\psi_{\alpha\beta} = \frac{K\lambda^2}{\pi^2\alpha\beta} \operatorname{сип} \frac{2\pi\alpha a}{\lambda} \operatorname{сип} \frac{2\pi\beta b}{\lambda} \exp \left[2\pi i \left(\nu t - \frac{\alpha x + \beta y + z}{\lambda} \right) \right]. \quad (13)$$

Таким образом, волновая функция $\psi_{\alpha\beta}$ равна нулю при $2\pi\alpha a/\lambda = k\pi$ и при $2\pi\beta b/\lambda = k\pi$, где k — целое число, т.е. она равна нулю в направлениях, для которых либо $\alpha = k\lambda/2a$, либо $\beta = k\lambda/2b$.

В противоположность этому функция $\psi_{\alpha\beta}$ максимальна в направлениях, для которых

$$\alpha = \frac{2k + 1}{2} \frac{\lambda}{2a}, \quad \beta = \frac{2k + 1}{2} \frac{\lambda}{2b}.$$

Таким образом, мы получили так называемый случай дифракции, локализованной на бесконечности. Для наблюдения картины дифракции (по крайней мере в оптической области) возьмем объектив, оптическая ось которого совпадает с осью Oz . В отсутствие дифракции наблюдалось бы лишь изображение прямоугольного отверстия, расположенного в фокальной плоскости объектива на оптической оси. Но из-за существования плоских монохроматических волн, падающих под углом к оси, мы получим также ряд других изображений, соответствующих максимумам волновой функции $\psi_{\alpha\beta}$. При возрастании k интенсивность этих изображений убывает (поскольку α и β входят в знаменатель выражения для $\psi_{\alpha\beta}$).

Итак, плоская волна, падающая на экран, имеет вид

$$\psi = a \exp \left[2\pi i \left(\nu t - \frac{z}{\lambda} \right) \right], \quad (14)$$

но при прохождении через прямоугольное отверстие она преобразуется в совокупность плоских волн, распространяющихся под малыми углами к оси:

$$\psi = \sum_{\alpha, \beta} a(\alpha, \beta) \exp \left[2\pi i \left(vt - \frac{\alpha x + \beta y + z}{\lambda} \right) \right], \quad (15)$$

причем амплитуды парциальных волн $a(\alpha, \beta)$ при изменении α и β проходят поочередно через максимумы и минимумы. Поскольку интенсивность максимумов с увеличением их порядка быстро убывает, протяженность волнового пакета по переменной α равна

$$\delta\alpha = k_1 \frac{\lambda}{2a} \geq \frac{\lambda}{2a},$$

где k_1 — малое положительное число, соответствующее высшему порядку дифракции, для которого интенсивность имеет заметную величину. Аналогично протяженность группы волн по переменной β равна

$$\delta\beta = k_2 \frac{\lambda}{2b} \geq \frac{\lambda}{2b}.$$

Если через μ обозначить «волновой вектор», соответствующий волне, дифрагируемой в направлении α, β, γ , т.е. вектор длиной $1/\lambda$, имеющий указанное направление, то

$$\mu_x = \alpha/\lambda, \quad \mu_y = \beta/\lambda, \quad \mu_z = \gamma/\lambda \approx 1/\lambda. \quad (16)$$

Максимальные изменения величин μ_x и μ_y таковы:

$$\delta\mu_x = \delta\alpha/\lambda, \quad \delta\mu_y = \delta\beta/\lambda,$$

откуда следует, что

$$\delta\mu_x \geq 1/2a, \quad \delta\mu_y \geq 1/2b. \quad (17)$$

Поскольку положение частицы в момент прохождения через отверстие известно с неопределенностями $\delta x = 2a$ и $\delta y = 2b$, мы имеем

$$\delta\mu_x \cdot \delta x \geq 1, \quad \delta\mu_y \cdot \delta y \geq 1.$$

Но фундаментальное соотношение $|p| = h/\lambda$ можно переписать в виде

$$\mathbf{p} = h\boldsymbol{\mu},$$

откуда следуют соотношения

$$\delta p_x \cdot \delta x \geq h, \quad \delta p_y \cdot \delta y \geq h,$$

т.е. мы снова приходим к соотношениям неопределенностей Гейзенберга.

Если же мы хотим определить координату z частицы и момент t ее прохождения через экран, то мы должны применить заслонку, о которой говорилось выше. Пусть τ — время, в течение которого отверстие открыто. Неопределенность величины t , очевидно, будет равна τ , а неопределенность величины z равна $U\tau$, где U — групповая скорость волн ψ , которая, как мы знаем, равна скорости движения частицы. Поэтому

$$\delta t = \tau, \quad \delta z = U\tau.$$

Но если отверстие открывается только на время τ , то мы можем пропустить через отверстие лишь урезанный пакет волн, который состоит из монохроматических волн, занимающих спектральный интервал, по порядку величины по меньшей мере равный $1/\tau$, причем $\delta\nu \geq 1/\tau$. Поэтому

$$\delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\partial(1/\lambda)}{\partial\nu} \delta\nu \geq \frac{1}{U\tau},$$

так как

$$\frac{1}{U} = \frac{\partial(1/\lambda)}{\partial\nu}.$$

Таким образом, имеем

$$\delta\nu \geq 1/\tau, \quad \delta(1/\lambda) \geq 1/U\tau.$$

Но из общих принципов волновой механики следует, что неопределенность энергии частицы в конечном состоянии будет равна $h/\delta\nu$, а неопределенность составляющей импульса p_z равна $h \delta\mu_z \approx h \delta(1/\lambda)$. Следовательно,

$$\delta W \cdot \delta t \geq h, \quad \delta p_z \cdot \delta z \geq h.$$

Это и есть два других соотношения неопределенностей Гейзенберга.

5. ВАЖНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ИЗМЕРЕНИИ СКОРОСТИ

На нескольких примерах мы показали, что анализ измерения двух канонически сопряженных величин приводит к соотношениям Гейзенберга.

Может быть, здесь читателю захочется возразить следующее. В момент времени t_1 можно провести опыт, который покажет, что частица находится поблизости от точки A , затем в последующий момент t_2 — другой опыт, который покажет, что частица находится поблизости от другой точки B трехмерного пространства. Если промежуток времени $t_2 - t_1$ достаточно велик, то, казалось бы, скорость можно определить с очень большой точностью как $v = AB/(t_2 - t_1)$, и тогда можно было бы сказать, что положение и импульс частицы одновременно измерены точно, а это противоречит соотношениям Гейзенберга.

Однако такое противоречие является лишь внешним. В самом деле, прежде всего отметим, что если указанным способом измерять скорость большого числа частиц, находящихся в одном и том же начальном состоянии, то мы будем получать различные результаты. И действительно можно показать, что волновой пакет ψ очень малых размеров, соответствующий локализации частицы поблизости от A в первом опыте, в ходе своего распространения быстро расплывется и примет значительные размеры по истечении большого, как мы предполагали, интервала времени $t_2 - t_1$. В силу принципа интерференции в момент t_2 область пространства, в которой может находиться частица, будет большой, в связи с чем ряд повторных опытов даст разные точки B .

Точно так же, и это очень важно, нельзя сказать, что рассмотренный спо-

соб измерения позволит одновременно определить положение и импульс частицы. В самом деле, скорость $v = \overline{AB}/(t_2 - t_1)$ будет известна лишь после второго наблюдения, а потому нельзя сказать, что мы одновременно знаем положение и скорость в момент t_1 . А знаем ли мы эти характеристики в момент времени t_2 ? Второе наблюдение движущейся частицы дает нам возможность определить положение B и, если угодно, приписать ему прямолинейную траекторию AB , по которой частица в данном интервале времени движется со скоростью $v = \overline{AB}/(t_2 - t_1)$. Но нам важно знать импульс движущейся частицы *после второго наблюдения*, а при определении положения B мы полностью нарушаем состояние движущейся частицы. Поэтому частице, локализованной в точке B , становится уже невозможным приписать теоретически рассчитанную скорость v , которая больше уже не может служить основой для предсказания последующего движения. Скорость v становится известной лишь в такой момент времени, когда она уже для нас не представляет интереса. Волновая механика, как и все физические теории, имеет своей целью предсказание и потому всегда *нацелена на будущее*. Представляет интерес лишь состояние наших знаний после каждого наблюдения. При этом после *второго наблюдения*, как и после первого, если мы точно знаем положение частицы, то совсем не знаем ее скорости. Даже *ретроспективное* приписывание скорости значения v в промежутке времени (t_1, t_2) есть произвольная гипотеза, поскольку в этом промежутке времени не производится никаких наблюдений, которые могли бы подтвердить, что частица движется вдоль AB равномерно и прямолинейно.

6. СЛУЧАЙ ДВУХ НАБЛЮДАЕМЫХ, КОММУТАТОР КОТОРЫХ ЕСТЬ НЕНУЛЕВОЙ ОПЕРАТОР

Мы рассмотрели возможность одновременного измерения двух канонически сопряженных величин и показали, что точность таких измерений всегда ограничена соотношениями Гейзенберга. Но сопряженные величины относятся к первой категории некоммутирующих величин: для них коммутатор постоянен. Можно ли прийти к аналогичным выводам для некоммутирующих величин второго рода, для которых коммутатор равен ненулевому оператору? Рассмотрим этот вопрос в наиболее важном с физической точки зрения случае, когда мы имеем дело с составляющими M_x , M_y , M_z углового момента \mathbf{M} .

Для простоты будем говорить об электроне, вращающемся по круговой орбите, соответствующей одному магнетону Бора, с постоянной скоростью v . Магнитный момент \mathcal{M} и угловой момент M для тока указанного вида даются выражениями

$$\mathcal{M} = \frac{e}{c} \frac{v}{2\pi R} \pi R^2 = IS = \frac{evR}{2c}, \quad M = m_0 v R \quad (18)$$

(предполагается, что $v \ll c$). Отсюда вытекает хорошо известная формула,

справедливая, как показал Эйнштейн, для любой системы движущихся зарядов (в пренебрежении спином):

$$\frac{\mathcal{M}}{M} = \frac{e}{2m_0c}, \quad (19)$$

так что при $M = h/2\pi$ мы имеем $\mathcal{M} = eh/4\pi m_0c$.

Мы хотим найти M , определив \mathcal{M} по эффекту взаимодействия тока с магнитометром, расположенным на расстоянии r от него.

Пусть μ — магнитный момент стрелки магнитометра. Тогда поле, создаваемое магнитометром в месте нахождения данного тока, по порядку величины будет равно μ/r^3 . Но чтобы точно измерить \mathcal{M} , мы должны при помощи магнитометра точно определить магнитное поле, создаваемое данным током в том месте, где находится магнитометр. По порядку величины это поле равно \mathcal{M}/r^3 .

Поэтому мы должны знать поле с неопределенностью

$$\Delta H = \frac{\mathcal{M}}{r^3} \eta, \quad \text{где } \eta \ll 1,$$

а следовательно, знать энергию магнитометра $\mu \cdot \mathbf{H}$ с неопределенностью, по порядку величины равной $\Delta E = \mu \Delta H = \mu(\mathcal{M}/r^3)\eta$. Тогда, согласно четвертому соотношению неопределенностей Гейзенберга, длительность эксперимента должна быть не меньше

$$\Delta t = \frac{h}{\Delta E} = \frac{hr^3}{\mu \mathcal{M} \eta}.$$

Но в этом промежутке времени рассматриваемый ток, находящийся в магнитном поле магнитометра $\sim \mu/r^3 = H'$, будет прецессировать вокруг направле-

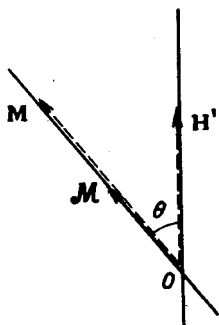


Рис. 3

ния поля с угловой скоростью ларморовской прецессии

$$\omega = \frac{eH'}{2m_0c}.$$

В самом деле, если мы возьмем магнитик, эквивалентный данному току, и поместим его в поле H' , то по теореме об угловом моменте производная $d\mathbf{M}/dt$ будет равна моменту силы, с которой магнитное поле \mathbf{H}' действует на \mathcal{M} относительно точки 0. Момент силы перпендикулярен вектору \mathbf{H}' , угол θ между векторами \mathbf{M} и \mathbf{H}' постоянен в силу формулы $(d/dt)(M\cos\theta) = 0$, а потому в проекции на плоскость, перпендикулярную вектору \mathbf{H}' , получим

$$\frac{d}{dt} \left[M \sin \theta \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix} \right] = H' \mathcal{M} \sin \theta \begin{Bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{Bmatrix}, \quad (20)$$

откуда

$$M \begin{Bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{Bmatrix} \omega = H' \mathcal{M} \begin{Bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{Bmatrix}, \quad (21)$$

где ω — угловая скорость прецессии магнита \mathcal{M} вокруг направления \mathbf{H}' . Таким образом,

$$\omega = H' \frac{\mathcal{M}}{M} = \frac{eH'}{2m_0c},$$

что и требовалось доказать.

Угол поворота оси данного тока, т.е. угол поворота вектора \mathcal{M} вокруг вектора \mathbf{H}' за время эксперимента будет равен

$$\alpha = \omega \Delta t \approx \frac{e}{2m_0c} \frac{\mu}{r^3} \frac{hr^3}{\mu \mathcal{M} \eta} = \frac{eh}{2m_0c} \frac{1}{\mathcal{M}} \frac{1}{\eta} = \frac{2\pi}{\eta} \gg 2\pi.$$

Следовательно, ось данного тока за время опыта сделает большое число оборотов вокруг направления вектора \mathbf{H}' , так что измерить можно будет лишь составляющую вектора \mathcal{M} , а значит, и вектора \mathbf{M} в направлении \mathbf{H}' . Мы видим, что одну составляющую вектора \mathbf{M} нельзя измерить одновременно с другой составляющей в согласии с тем, что составляющие вектора \mathbf{M} не коммутируют между собой. Но если обе величины \mathcal{M} и \mathbf{M} равны нулю, то магнитометр дает возможность убедиться в равенстве нулю всех трех составляющих данных векторов. В этом исключительном случае оказывается возможным одновременное измерение всех составляющих, что тоже согласуется с выводами общей теории.

7. ПРИНЦИП ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ БОРА

Уточним теперь один пункт, на который важно обратить внимание с точки зрения дальнейшего изложения. В элементарных курсах оптики волной обыч-

но называют плоскую монохроматическую волну, поскольку световые волновые пакеты, хотя и ограничены в пространстве, все же достаточно протяжены и их можно приближенно считать плоскими монохроматическими волнами. Такая «волна» имеет определенную частоту, определенную длину волны и определенное направление распространения. В волновой механике с ней сопоставляется вектор \mathbf{p} , указывающий направление распространения, длиной $|\mathbf{p}|$ которого определяется длина волны

$$\lambda = h/|\mathbf{p}|$$

и, следовательно, частота. Поэтому волну, соответствующую частице, мы будем характеризовать вектором \mathbf{p} . Такая плоская монохроматическая волна, однородная и не допускающая никакой локализации частицы, соответствует идеализованному представлению о чистом движении без пространственно-временной локализации.

В противоположность этому координаты x , y , z частицы соответствуют представлению о пространственно-временной локализации в момент времени t . Переменные x , y , z соответствуют волновому аспекту понятия «частица», носящему чисто динамический нелокализованный характер, а канонически сопряженные им переменные p_x , p_y , p_z — корпускулярному аспекту частицы, в некотором смысле исключающему идею движения (Зенон Элейский). Если теперь вернуться к неравенствам Гейзенберга, то мы увидим, что элементарные частицы могут описываться плоской волной или локализованной корпускулой лишь в крайних случаях. В общем случае волновой и корпускулярный аспект существуют совместно, но являются в какой-то степени неполными. Сопоставляемая с частицей волна ψ представляет собой суперпозицию ряда плоских монохроматических волн, а локализация оказывается неопределенной в более или менее значительной области пространства.

Наряду с этим соотношения неопределенности Гейзенберга показывают, что чем в большей степени обнаруживается один из аспектов частицы, тем более теряется второй аспект. Этим объясняется то, что волновая механика дает возможность одновременно использовать два, казалось бы, противоречащих друг другу понятия — плоской однородной бесконечно протяженной волны и локализованной корпускулы. Именно поэтому эти два столь различных образа никогда не вступают в противоречие между собой; один из аспектов всегда ослабевает, когда усиливается другой. Здесь проявляется очень интересная особенность представлений современной микрофизики. Данное обстоятельство Бор выразил словами: «Волна и частица — это (взаимно) «дополнительные аспекты реальности». Каждый раз, когда поведение «частицы» может быть охарактеризовано распространением плоской монохроматической волны, ее корпускулярный аспект пропадает, а каждый раз, когда это поведение характеризуется перемещением корпускулы, локализованной в пространстве, пропадает ее волновой аспект. Введенный таким образом Бором принцип «до-

полнительности» очень интересен; как указывал сам Бор, не исключено, что он может найти приложение не только в физике¹⁾.

Для иллюстрации принципа дополнительности рассмотрим конкретный пример — дифракцию электронов на кристалле. Пучок электронов создается «электронной пушкой» — устройством, в котором имеется раскаленная нить, испускающая электроны, и система электродов с соответствующими потенциалами, сообщающими всем электронам одинаковое ускорение в одном и том же направлении. В результате возникает пучок (круглого сечения) электронов с одинаковой энергией. Электронный пучок направляется на поверхность кристалла. Рассеянные электроны регистрируются на фотопластинке и оставляют в ее чувствительном слое точечные следы.

Диаметр поперечного сечения электронной пушки предполагается бесконечно большим по сравнению с длиной волны, соответствующей каждому из электронов. Поэтому все электроны, выходящие из электронной пушки, имеют совершенно определенный импульс, ибо они прошли точно известную разность потенциалов, но их положение оказывается полностью неопределенным на расстояниях порядка длины волны. Таким образом, их можно представить как плоские монохроматические волны. Такая волна падает на поверхность кристалла и даже проникает сквозь несколько слоев атомов. Упорядоченный

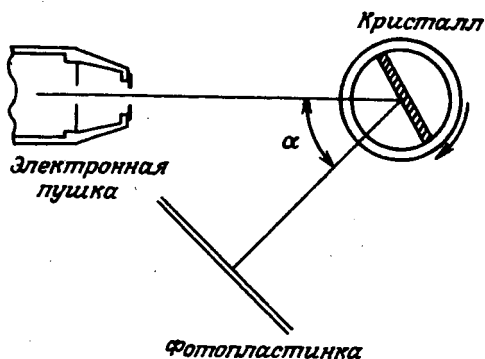


Рис. 4

¹⁾ Вряд ли нужно напоминать, что взгляд де Бройля на дополнительность в дальнейшем изменился. Например, в работе «Определенность и неопределенность в науке» имеется следующее высказывание: «если слово «дополнительность» употребляется только как название для поочередного проявления корпускулярных и волновых свойств частиц в бесспорных опытах, то такое употребление совершенно законно. Но это слово не дает никакого объяснения истинному дуализму волн и частиц. «Дополнительность» здесь можно сравнить с «усыпляющей способностью» опиума, над которой смеялся Мольер: об опиуме как снотворном вполне можно сказать, что он обладает «усыпляющей способностью». Но в этих словах не следует видеть объяснения свойств опиума» [III, 8, с. 20].— Ж.Л.

характер расположения атомов в кристалле приводит к дифракции, в результате чего вероятность нахождения электрона в разных направлениях меняется с изменением направления и проходит через максимумы в некоторых выделенных направлениях (теория Лауэ — Брегга). Такой процесс рассеяния может быть описан лишь на основе волновых представлений, поскольку в данном явлении участвует значительная область кристалла и необходимо учитывать разности фаз (понятие сугубо волновое) между вторичными волнами, рассеиваемыми на различных атомах кристалла. Если попытаться подойти к рассеянию электронов, опираясь на корпускулярные представления, то нужно будет рассматривать траекторию электрона, соударяющегося с поверхностью кристалла в одной точке, как это показано ломаной на рисунке. Но в этом случае отражение электрона от кристалла зависело бы лишь от физических свойств кристаллической поверхности в точке падения, а не от всей упорядоченной структуры кристалла; кроме того, корпускулярные представления делают невозможным введение понятия разности фаз.

Таким образом, при дифракции электронов на кристалле проявляется волновой аспект электрона, а его корпускулярный аспект полностью пропадает. Но вот затем электрон рассеивается и оставляет в чувствительном слое фотопластики локализованный след подобно пуле, пробившей мишень. В этом втором явлении электрон ведет себя, как локализованная частица, малая корпускула, и он уже ничем не проявляет своих волновых свойств.

Итак, здесь мы имеем дело с опытом, где последовательно происходят два процесса, один из которых объясняется на основе волновых представлений, а другой — на основе корпускулярных. Однако при объяснении каждого из этих процессов нужен либо только один, либо только другой подход, а потому противоречие и не возникает.

8. БОРОВСКОЕ ОБЪЯСНЕНИЕ ОПЫТА ЮНГА

Приведем еще одну рассматривавшуюся Бором иллюстрацию дополнительности, носящую несколько иной характер: хорошо известный опыт Юнга. Перпендикулярно поверхности экрана, в котором имеются два отверстия, падает когерентный пучок монохроматического света. Два близко расположенных отверстия в экране, пропускающие свет, играют роль двух малых источников когерентного света. Световые волны, создаваемые за экраном этими двумя малыми источниками, складываются между собой, и в результате их интерференции возникают светлые и темные полосы. Чтобы найти положение полос, которое, разумеется, зависит от длины волны света, нужно вычислить разность фаз волн, приходящих в данную точку от двух отверстий. Наблюдения полностью согласуются с вычислениями на основе волновой теории, и именно поэтому опыт Юнга примерно 150 лет назад явился одним из самых убедительных подтверждений правильности волновой теории света.

Мы здесь имеем дело с опытом, в котором особенно ярко проявляется волновой аспект света. Но если при описании этого опыта мы хотим воспользоваться представлением о фотоне, рассматриваемом как локализованная корпускула, то мы столкнемся с непреодолимыми трудностями. Траектория фото-

на должна проходить через одно из двух отверстий, а это нарушает симметрию двух отверстий, которая обязательно должна сохраняться при интерпретации данного явления. В самом деле, как можно объяснить то, что траектория фотона, проходящего через одно отверстие, испытывает влияние другого? Ведь такое влияние необходимо принимать во внимание при анализе тех явлений, в которых существенно взаимное расположение двух отверстий. Как при чисто корпускулярном описании может быть учтена разность фаз, связанная с различием в расстояниях до отверстий, без учета которой невозможно правильное объяснение наблюдаемого явления?

Боровский принцип дополнительности сразу же снимает эти трудности. Интерференция, возникающая в опыте Юнга, характеризует явление, в котором обнаруживается волновая природа света, тогда как его корпускулярная природа без противоречий проявиться здесь не может. Рассматривая этот вопрос более детально, Бор показал, что любое устройство, дающее возможность определить, через какое из отверстий в опыте Юнга проходит фотон, обязательно сделает невозможной интерференцию. Давая возможность обнаружить корпускулярную природу света, такое устройство с неизбежностью приведет к тому, что не будет обнаружена его волновая природа. Ход рассуждений Бора таков.

Предположим, что монохроматический свет, падающий на экран Юнга, сначала проходит через узкую щель в еще одном экране, которая играет роль источника света. Обозначим через a расстояние между отверстиями Юнга и выберем оси x и y так, как показано на рис. 5.

Обозначим через D расстояние между экранами (которые будем считать параллельными), а через λ — длину волны света.

Предположим, что в направлении оси x положение первой щели известно с неопределенностью Δx . На практике a и Δx всегда малы по сравнению с D .

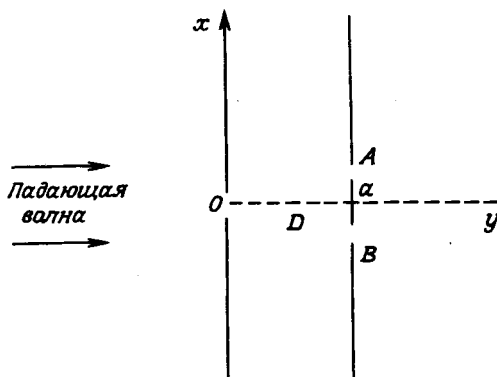


Рис. 5

Разность фаз световых волн, достигающих двух отверстий Юнга, будет равна

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\sqrt{D^2 + \left(\frac{a}{2} + \Delta x\right)^2} - \sqrt{D^2 + \left(\frac{a}{2} - \Delta x\right)^2} \right], \quad (22)$$

или приближенно $\Delta\varphi = 2\pi(a\Delta x/\lambda D)$.

Для наблюдения четких полос за вторым экраном необходимо, чтобы разность фаз световых волн, выходящих из двух отверстий Юнга, была довольно определенной, т.е. чтобы возможная неопределенность в разности фаз была значительно меньше 2π , а это дает

$$\Delta x \ll \frac{\lambda D}{a}. \quad (23)$$

В то же время, чтобы можно было сказать, через какое из отверстий Юнга пройдет в конечном итоге фотон, вышедший из щели в первом экране, нужно с достаточной точностью знать направление импульса этого фотона при его выходе из этой щели. Если p_x и p_y — составляющие нужного нам импульса, то абсцисса точки второго экрана, в которую попадет фотон, будет равна $D(p_x/p_y)$, а потому если p_x задается с неопределенностью Δp_x , то и указанная абсцисса будет иметь неопределенность $D(\Delta p_x/p_y)$. Если мы хотим узнать, через какое из отверстий Юнга прошел фотон, то, как легко видеть, нужно, чтобы выполнялось условие

$$a \gg D \frac{\Delta p_x}{p_y}. \quad (24)$$

Учитывая, что пучок света, выходящий из первой щели, почти параллелен оси y , т.е. что, приближенно $p_y = p = h/\lambda$, получаем, что условие (24) примет приближенный вид

$$a \gg D(\Delta p_x/p) = D\Delta p_x(\lambda/h). \quad (25)$$

Однако мы знаем, что, каковы бы ни были устройства для измерения координаты x и составляющей импульса p_x фотона в момент прохождения через первый экран, всегда выполняется соотношение Гейзенберга $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h$.

Поэтому условие (25) дает

$$\Delta x \gg \lambda D/a. \quad (26)$$

Но совершенно очевидно, что неравенство (26) противоречит неравенству (23). Мы приходим к выводу, что если можно установить, через какое из отверстий проходит фотон, то невозможно будет наблюдать явление интерференции, и наоборот, если можно наблюдать явление интерференции, то нельзя сказать, через какое из отверстий прошел фотон. Корпускулярный и волновой аспекты света здесь как бы играют в прятки друг с другом и никогда не вступают в

прямой конфликт между собой — в этом и заключается смысл принципа дополнителности Бора¹⁾.

Изложенные выше рассуждения в равной степени приложимы как к электрону, так и к другим материальным частицам. В самом деле, опыт Юнга, по крайней мере в принципе, возможен для любых частиц. Подобные же рассуждения можно провести и в случае других интерференционных приборов.

¹⁾ Позже Луи де Бройль критиковал данный способ рассуждения и изменил его [II, 29, с. 65]. В частности, он отмечал следующее: «Способ введения соотношения неопределенностей здесь несколько странен, так как он неявно предполагает, что составляющую p_x импульса частицы можно измерить по импульсу отдачи первого экрана вдоль оси x , а это невозможно, поскольку этот экран имеет макроскопическую массу и может быть жестко закреплен. К тому же в рассуждениях не учитывается ширина щели в первом экране (которую не следует смешивать с неопределенностью Δx). Эта ширина весьма существенна в явлении дифракции, которое позволяет волне, проходящей через щель в первом экране, попадать в отверстие Юнга». И де Бройль приходит к выводам Бора иначе — показывая, что для того, чтобы частица прошла к отверстию Юнга, нужно увеличить диаметр щели в первом экране, а это сделает невозможной интерференцию. — Ж. Л.

Глава VIII

Точная форма соотношений неопределенностей

1. ТЕОРЕМА О ДИСПЕРСИЯХ НЕКОММУТИРУЮЩИХ ВЕЛИЧИН

Исходя из фундаментального постулата о возможности представления в любой момент времени состояния наших знаний о частице некой волновой функцией ψ , мы, опираясь на свойства разложений в ряд и интеграл Фурье, показали, что неопределенности двух канонически сопряженных величин p и q по порядку величины удовлетворяют соотношению

$$\Delta q \cdot \Delta p \geq h. \quad (1)$$

Данное соотношение представляет собой качественную форму соотношения Гейзенберга. Мы видели, что никакой опыт не может дать для канонически сопряженных величин более точные значения, чем те, которые допускаются соотношением (1).

Мы показали также, что, вообще говоря, невозможно одновременно измерить любые две физические величины, операторы которых не коммутируют, даже если эти величины и не являются канонически сопряженными (например, составляющие углового момента). Правда, в этом, последнем случае одновременное измерение может оказаться возможным *в виде исключения* (если соответствующие операторы имеют собственное значение, равное нулю).

Мы дадим более точный вывод этих результатов, доказав теорему о дисперсии некоммутирующих величин, которая, по-видимому, принадлежит Паули.

Первое доказательство

Прежде всего введем одно новое понятие. Пусть F — линейный оператор, определенный на некоторых переменных в области D . Назовем *сопряженным оператором* по отношению к F такой оператор F^+ , который тоже определен в области D и удовлетворяет равенству

$$\int_D f^* F g \, d\tau = \int_D (F^+ f)^* g \, d\tau$$

для всех конечных, гладких и непрерывных в D функций f и g , которые обращаются в нуль на границе области D , так что поверхностные интегралы, воз-

никающие при взятии по частям интеграла по области D , равны нулю. Если сравнить определение оператора F^+ с определением эрмитова оператора

$$\int_D f^* A g \, d\tau = \int_D g A^* f \, d\tau,$$

то мы увидим, что для эрмитова оператора F выполняется равенство $F^+ = F$, т.е. эрмитов оператор — самосопряженный.

Для того чтобы линейный оператор был эрмитовым, среднее (в смысле волновой механики) значение произведения FF^* должно быть действительным и положительным (или равным нулю):

$$\overline{FF^+} = \int_D \psi^* FF^+ \psi \, d\tau = \int_D (F^+ \psi)^* F^+ \psi \, d\tau = \int_D |F^+ \psi|^2 \, d\tau \geq 0. \quad (2)$$

На этом основании мы сможем доказать следующую теорему фундаментального характера.

Теорема. Если две наблюдаемые физические величины соответствуют двум линейным эрмитовым операторам A и B , то

$$\sigma_A \sigma_B \geq \frac{1}{2} | [A, B] |, \quad (3)$$

где $[A, B]$ — коммутатор операторов A и B , а σ_A и σ_B — дисперсии¹⁾, определяемые формулами

$$\sigma_A = \sqrt{(A - \overline{A})^2}, \quad \sigma_B = \sqrt{(B - \overline{B})^2}. \quad (4)$$

Для доказательства рассмотрим линейный неэрмитов оператор $A + i\lambda B$, где λ — действительная постоянная. Сопряженным к этому оператору будет $A - i\lambda B$, и по формуле (2) получим, что среднее значение

$$\overline{(A + i\lambda B)(A - i\lambda B)} = \overline{A^2 + \lambda^2 B^2 - i\lambda [A, B]}$$

есть действительное положительное число (или равно нулю). Поэтому функция

$$f(\lambda) = \overline{A^2 + \lambda^2 B^2 - i\lambda [A, B]}$$

действительна и неотрицательна. Следовательно, $\overline{[A, B]}$ — чисто мнимая величина. Кроме того, $f(\lambda)$ имеет минимум при

$$\lambda_0 = \frac{i \overline{[A, B]}}{2 B^2},$$

¹⁾ См. примечание на с. 83. — Прим. ред.

в котором ее значение таково:

$$f(\lambda_0) = \overline{A^2} + \frac{1}{4} \frac{\overline{([A, B])^2}}{\overline{B^2}}.$$

Поскольку это значение должно быть положительным или нулевым, мы имеем

$$\overline{A^2} \cdot \overline{B^2} \geq -\frac{1}{4} \overline{([A, B])^2}. \quad (4')$$

Положим

$$\delta A = A - \overline{A}, \quad \delta B = B - \overline{B},$$

где \overline{A} и \overline{B} — наблюдаемые величины, а A и B — операторы, так что δA и δB — операторы. Легко получим

$$[\delta A, \delta B] \equiv [A - \overline{A}, B - \overline{B}] = [A, B].$$

Применяя неравенство (4) к операторам δA и δB и учитывая последнее соотношение, получаем

$$\overline{(\delta A)^2} \cdot \overline{(\delta B)^2} \geq -\frac{1}{4} \overline{([A, B])^2}.$$

Поскольку $[A, B]$ есть чисто мнимая величина,

$$\sigma_A \cdot \sigma_B \equiv \sqrt{\overline{(\delta A)^2}} \cdot \sqrt{\overline{(\delta B)^2}} \geq \frac{1}{2} \overline{|[A, B]|},$$

что и утверждалось в формулировке теоремы.

Применим эту теорему к случаю двух канонически сопряженных величин, для которых $[A, B] = -h/2\pi i$, так что

$$[A, B] = \int_D \psi^* \left(-\frac{h}{2\pi i} \right) \psi \, d\tau = -\frac{h}{2\pi i} \quad (5)$$

есть чисто мнимая величина, как это и должно быть. По доказанной теореме имеем

$$\sigma_A \cdot \sigma_B \geq \frac{h}{4\pi}. \quad (6)$$

Это и есть точная форма соотношения неопределенностей Гейзенберга. В частности, из нее следует, что

$$\sigma_x \cdot \sigma_{p_x} \geq \frac{h}{4\pi}. \quad (7)$$

Применяя доказанную теорему к двум некоммутирующим наблюдаемым, коммутатор которых есть оператор C ($[A, B] = C$), получим $\overline{[A, B]} = \overline{C}$ и,

следовательно,

$$\sigma_A \cdot \sigma_B \geq |\bar{C}|/2. \quad (8)$$

В частности, при

$$A = M_x, B = M_y, [A, B] = \frac{h}{2\pi i} M_z$$

имеем

$$\sigma_{M_x} \cdot \sigma_{M_y} \geq \frac{h}{4\pi} |\bar{M}_z|. \quad (9)$$

Вообще говоря, произведение дисперсий больше нуля. Но в отдельных случаях, когда $\bar{M}_z = 0$, оно может равняться нулю.

Второе доказательство

Дадим второе доказательство формулы $\sigma_x \cdot \sigma_{p_x} \geq h/4\pi$ для канонически сопряженных величин.

Пусть q_k — координата, а p_k — канонически сопряженный с ней импульс. Имеем

$$\bar{q}_k = \int_D \psi^* q_k \psi d\tau. \quad (10)$$

Возьмем за начало отсчета координаты q_k значение \bar{q}_k , чтобы среднее значение координаты q_k было равно нулю. Тогда

$$\overline{q_k^2} = \overline{(q_k - \bar{q}_k)^2} = \bar{q}_k^2 = \int_D \psi^* q_k^2 \psi d\tau.$$

В то же время

$$\bar{p}_k = \int_D \psi^* \left(-\frac{h}{2\pi i} \right) \frac{\partial \psi}{\partial q_k} d\tau, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{p_k}^2 &= \overline{(p_k - \bar{p}_k)^2} = \bar{p}_k^2 - (\bar{p}_k)^2 = \\ &= \int_D \psi^* \left(-\frac{h^2}{4\pi^2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_k^2} d\tau - (\bar{p}_k)^2. \end{aligned}$$

Положим

$$\psi' = \psi \exp \left(\frac{2\pi i}{h} \bar{p}_k q_k \right). \quad (12)$$

Функция ψ' , как и функция ψ , конечна, непрерывна и гладка в области D и

обращается в нуль на границах этой области. Можно написать

$$\sigma_{q_k}^2 = \int_D \psi'^* q_k^2 \psi' d\tau, \quad \sigma_{p_k}^2 = \int_D \psi'^* \left(-\frac{\hbar^2}{4\pi^2} \right) \frac{\partial^2 \psi'}{\partial q_k^2} d\tau, \quad (13)$$

где мы учли, что $\psi'^* \psi' = |\psi'|^2$, т.е. что ψ' имеет ту же норму, что и ψ . В правильности второй формулы (13) нетрудно убедиться, подставив в нее вместо ψ' величину $\psi \exp\{2\pi i/\hbar p_k q_k\}$.

Поскольку ψ обращается в нуль на границах области D , взяв интеграл по частям, получим

$$\sigma_{p_k}^2 = \frac{\hbar^2}{4\pi^2} \int_D \frac{\partial \psi'^*}{\partial q_k} \frac{\partial \psi'}{\partial q_k} d\tau.$$

Теперь я утверждаю, что

$$\frac{1}{4} \left(\int_D \psi'^* \psi' d\tau \right)^2 \leq \int_D q_k^2 \psi'^* \psi' d\tau \int_D \frac{\partial \psi'^*}{\partial q_k} \frac{\partial \psi'}{\partial q_k} d\tau. \quad (14)$$

Чтобы доказать это, рассмотрим две последовательности комплексных величин a_1, \dots, a_n и b_1, \dots, b_n . Очевидно, что

$$\left| \sum_i a_i b_i \right| \leq \sum_i |a_i b_i| \leq \sum_i |a_i| |b_i|,$$

откуда

$$\left| \sum_i (a_i b_i) \right|^2 \leq \left(\sum_i |a_i| |b_i| \right)^2,$$

и, следовательно,

$$\sum_i |a_i|^2 \sum_i |b_i|^2 - \left| \sum_i a_i b_i \right|^2 \geq \sum_i |a_i|^2 \sum_i |b_i|^2 - \left(\sum_i |a_i| |b_i| \right)^2.$$

Второй член в правой части данного соотношения равен

$$\sum_{i>j} (|a_i| |b_j| - |b_i| |a_j|)^2,$$

т.е. это сумма квадратов. Поэтому

$$\sum_i |a_i|^2 \sum_i |b_i|^2 \geq \left| \sum_i a_i b_i \right|^2,$$

или в развернутом виде

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots|^2 \leq (|a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots)(|b_1|^2 + |b_2|^2 + \dots). \quad (15)$$

Разобьем теперь область D на элементы $\Delta\tau$ и рассмотрим две последовательности комплексных величин

$$[q_k \psi']_{\Delta\tau_1} \sqrt{\Delta\tau_1}; [q_k \psi'^*]_{\Delta\tau_1} \sqrt{\Delta\tau_1}; [q_k \psi']_{\Delta\tau_2} \sqrt{\Delta\tau_2}; [q_k \psi'^*]_{\Delta\tau_2} \sqrt{\Delta\tau_2}; \dots,$$

$$\left[\frac{\partial \psi'^*}{\partial q_k} \right]_{\Delta\tau_1} \sqrt{\Delta\tau_1}; \left[\frac{\partial \psi'}{\partial q_k} \right]_{\Delta\tau_1} \sqrt{\Delta\tau_1}; \left[\frac{\partial \psi'^*}{\partial q_k} \right]_{\Delta\tau_2} \sqrt{\Delta\tau_2}; \left[\frac{\partial \psi'}{\partial q_k} \right]_{\Delta\tau_2} \sqrt{\Delta\tau_2}; \dots$$

Здесь $[q_k \psi']_{\Delta\tau_1}$ — среднее значение величины $q_k \psi'$ в объеме $\Delta\tau_1$. Применим к этим двум последовательностям предыдущую формулу. Получим

$$\begin{aligned} \left| \sum_i \left[q_k \psi' \frac{\partial \psi'^*}{\partial q_k} \right]_{\Delta\tau_i} \Delta\tau_i + \sum_i \left[q_k \psi'^* \frac{\partial \psi'}{\partial q_k} \right]_{\Delta\tau_i} \Delta\tau_i \right|^2 \leq \\ \leq 2 \sum_i [q_k^2 \psi' \psi'^*]_{\Delta\tau_i} \Delta\tau_i 2 \sum_i \left[\frac{\partial \psi'}{\partial q_k} \frac{\partial \psi'^*}{\partial q_k} \right]_{\Delta\tau_i} \Delta\tau_i. \end{aligned}$$

Если число элементов $\Delta\tau_i$ увеличивать до бесконечности, уменьшая каждый из них, то в пределе получим

$$\left| \int_D q_k \psi' \frac{\partial \psi'^*}{\partial q_k} d\tau + \int_D q_k \psi'^* \frac{\partial \psi'}{\partial q_k} d\tau \right|^2 \leq 4 \int_D q_k^2 \psi' \psi'^* d\tau \int_D \frac{\partial \psi'}{\partial q_k} \frac{\partial \psi'^*}{\partial q_k} d\tau. \quad (16)$$

Поскольку функция ψ' обращается в нуль на границах области D , интегрирование по частям дает

$$\left| \int_D q_k \frac{\partial}{\partial q_k} (\psi' \psi'^*) d\tau \right|^2 = \left| - \int_D \psi'^* \psi' d\tau \right|^2 = \left(\int_D \psi'^* \psi' d\tau \right)^2,$$

что и доказывает справедливость формулы (14).

Следовательно,

$$\sigma_{q_k}^2 \cdot \sigma_{p_k}^2 = \frac{h^2}{4\pi^2} \int_D q_k^2 \psi'^* \psi' d\tau \int_D \frac{\partial \psi'^*}{\partial q_k} \frac{\partial \psi'}{\partial q_k} d\tau,$$

и с учетом формулы (14) получаем

$$\sigma_{q_k}^2 \cdot \sigma_{p_k}^2 \geq \frac{h^2}{16\pi^2} \left[\int_D \psi'^* \psi' d\tau \right]^2 = \frac{h^2}{16\pi^2},$$

поскольку функция ψ' нормирована в области D . Таким образом,

$$\sigma_{q_k} \cdot \sigma_{p_k} \geq \frac{h}{4\pi},$$

и мы снова получаем теорему о дисперсиях канонически сопряженных величин.

2. ОПТИМАЛЬНОСТЬ ГАУССОВА ВОЛНОВОГО ПАКЕТА

Второе доказательство теоремы о дисперсиях дает нам возможность показать, что равенство в соотношении $\sigma_{q_k} \cdot \sigma_{p_k} \geq h/4\pi$ соответствует случаю, когда зависимость функции $|\psi|$ от q_k имеет вид гауссовой экспоненты¹⁾

$$\exp\left(-\frac{(q_k - \bar{q}_k)^2}{2a^2}\right).$$

В таком случае имеем гауссов волновой пакет; он характеризуется наименьшей возможной дисперсией и в этом смысле «оптимален».

Для доказательства вернемся к рассуждениям на с. 126, которые привели нас к формуле

$$\sum_i |a_i|^2 \sum_i |b_i|^2 \geq \left| \sum_i a_i b_i \right|^2.$$

Можно видеть, что в этом соотношении знак равенства допустим только в том случае, если все отношения $|a_i|/|b_i|$ одинаковы при всех значениях индекса i .

Рассуждения, приведшие к формуле (14), показывают, что в этой формуле знак неравенства относится к случаю, когда все отношения

$$\left[\frac{\partial |\psi'|}{\partial q_k} \right]_{\Delta\tau} / |q_k \psi'|_{\Delta\tau}$$

одинаковы во всех элементах $\Delta\tau_i$.

¹⁾ Плотности нормального распределения. — Прим. ред.

Отсюда следует, что в соотношении

$$\sigma_{q_k} \cdot \sigma_{p_k} \geq h/4\pi$$

знак равенства соответствует случаю, когда величина

$$\frac{1}{q_k |\psi'|} \cdot \frac{\partial |\psi'|}{\partial q_k}$$

не зависит от q_k .

Таким образом, величина $|\psi'|$, рассматриваемая как функция переменной q_k , должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial |\psi'|}{\partial q_k} = C q_k |\psi'|, \quad (17)$$

общее решение которого имеет вид

$$|\psi'| = C' \exp(C q_k^2/2).$$

Поскольку величина $|\psi'|$ должна обращаться в нуль при $q_k = \pm \infty$, постоянная C должна быть отрицательной, так что можно положить $C = -1/a^2$. Тогда

$$|\psi'| = C' \exp(-q_k^2/2a^2). \quad (18)$$

Этот результат получен в предположении (с. 125), что $\bar{q}_k = 0$. Если же $\bar{q}_k \neq 0$, то получим

$$|\psi'| = |\psi| = C' \exp(-(q_k - \bar{q}_k)^2/2a^2). \quad (19)$$

Отметим, что здесь «постоянная» C' может быть функцией переменных q , отличных от переменных q_k . Нетрудно показать, что $\sigma_{q_k} = a/\sqrt{2}$. В самом деле,

$$\sigma_{q_k}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (q_k - \bar{q}_k)^2 \exp(-(q_k - \bar{q}_k)^2/a^2) dq_k}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(q_k - \bar{q}_k)^2/a^2) dq_k} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} u^2 \exp(-u^2/a^2) du}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2/a^2) du} = \frac{a^2}{2}. \quad (20)$$

Если волновая функция представляет собой гауссов волновой пакет по координате q_k , то вероятность нахождения частицы в интервале $(q_k, q_k + dq_k)$ будет пропорциональна $|\psi'|^2 \sim \exp(-(q_k - \bar{q}_k)^2/2\sigma_{q_k}^2)$. Таким образом, эта вероятность подчиняется нормальному (гауссову) распределению.

Рассматриваемое состояние ψ соответствует случаю, когда возможные ошибки измерения величины q_k удовлетворяют нормальному распределению. В соотношении неопределенностей Гейзенберга это наиболее благоприятный

случай, поскольку в этом случае произведение дисперсий минимально и равно $h/4\pi$.

Замечание о гауссовых пакетах

Из изложенного выше явствует важное значение гауссовых волновых пакетов в волновой механике. Такие пакеты обладают еще одним замечательным свойством: волновой пакет, являющийся гауссовым по переменной q_k , будет также гауссовым и по переменной p_k .

В самом деле, предположим, что

$$|\psi| = C \exp(-q_k^2/2a^2) = C \exp(-q_k^2/4\sigma_{q_k}^2)$$

(где принято $\bar{q}_k = 0$). Тогда $|\psi|^2 = C^2 \exp(-q_k^2/2\sigma_{q_k}^2)$. Постоянная C может зависеть от координат q , отличных от q_k . Предположим, что волновая функция ψ допускает разложение в интеграл Фурье вида

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{+\infty} C(p_k) \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} p_k q_k\right) dp_k, \quad (21)$$

где ψ и $C(p_k)$ могут зависеть от переменных q , отличных от q_k . Эти дополнительные переменные мы не пишем, так как они не влияют на ход рассуждений.

Из теории интегралов Фурье следует, что

$$C(p_k) = \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi \exp\left(\frac{2\pi i}{h} p_k q_k\right) dq_k, \quad (22)$$

и, поскольку

$$\psi = C \exp\left(-\frac{q_k^2}{2a^2}\right) \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} p_k q_k\right),$$

имеем

$$C(p_k) = \frac{C}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{q_k^2}{2a^2}\right) \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} p_k q_k\right) \exp\left(\frac{2\pi i}{h} p_k q_k\right) dq_k,$$

$$C(p_k) = \frac{C}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left[\frac{q_k}{a\sqrt{2}} - \frac{2\pi i(p_k - \bar{p}_k)a}{h\sqrt{2}}\right]^2\right) \times \\ \times \exp\left(-\frac{4\pi^2}{h^2} \frac{(p_k - \bar{p}_k)^2 a^2}{2}\right) dq_k,$$

$$C(p_k) = C' \exp\left(-\frac{4\pi^2}{h^2} (p_k - \bar{p}_k)^2 \frac{a^2}{2}\right).$$

Поэтому

$$|C(p_k)|^2 = |C'|^2 \exp \left(- \frac{4\pi^2}{h^2} (p_k - \bar{p}_k)^2 a^2 \right) =$$

$$= |C'|^2 \exp \left(- \frac{4\pi^2}{h^2} \frac{(p_k - \bar{p}_k)^2}{a'^2} \right),$$

$$|C(p_k)|^2 = |C'|^2 \exp \left(- \frac{4\pi^2}{h^2} \frac{(p_k - \bar{p}_k)^2}{2\sigma_{p_k}^2} \right),$$

где $a' = 1/a$. Учитывая, что $|C(p_k)|^2$ есть вероятность значения p_k , можно видеть, что распределение вероятностей для p_k будет нормальным в том случае, когда

$$\sigma_{p_k}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{a'h}{2\pi} \right)^2 = \frac{h^2}{8\pi^2} \frac{1}{a^2} = \frac{h^2}{16\pi^2} \frac{2}{a^2},$$

т.е. $\sigma_{q_k} \cdot \sigma_{p_k} = h/4\pi$, так как $a = \sqrt{2} \sigma_{q_k}$.

Мы получили теорему о дисперсиях со знаком равенства, но теперь мы видим, что волновой пакет будет гауссовым как по q_k , так и по p_k .

3. СРАВНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О ДИСПЕРСИЯХ С КАЧЕСТВЕННЫМИ СООТНОШЕНИЯМИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ГЕЙЗЕНБЕРГА (ПАУЛИ, РОБЕРТСОН)

Теперь у нас две формы соотношения неопределенностей. Во-первых, опираясь на свойства разложения Фурье, мы показали, что *по порядку величины*

$$\delta p \cdot \delta q \geq h. \quad (24)$$

Данное соотношение носит в какой-то мере качественный характер, поскольку относится лишь к порядкам величины. Это и понятно, если учесть допущения, на которых основаны разложения Фурье, и особенно если вспомнить рассуждения относительно микроскопа Гейзенберга, где обоснование соотношения неопределенностей опиралось на определение оптической разрешающей способности (две близко расположенные точки объекта могут быть разрешены оптическим прибором лишь в том случае, если центр дифракционного изображения одной из точек совпадает с первым минимумом дифракционного изображения второй точки). Определение разрешающей способности содержит элемент произвола и носит лишь приближенный характер.

Во-вторых, мы получили точное соотношение

$$\sigma_q \cdot \sigma_p \geq h/4\pi, \quad (7)$$

которое вытекает из общей формулы

$$\sigma_A \cdot \sigma_B \geq \frac{1}{2} \overline{(AB - BA)}, \quad (3)$$

примененной к канонически сопряженным величинам q и p .

Как мы видели, из соотношений Гейзенберга в их качественной форме следует, что в любой момент времени и, в частности, непосредственно после измерения для двух канонически сопряженных величин p и q существуют неопределенности, произведение которых по порядку величины всегда больше или равно h . К тому же выводу несколько более точным путем нас приводит теорема о дисперсиях. В любой момент времени и, в частности, сразу после измерения наши сведения о состоянии системы характеризуются волновой функцией ψ , а две канонически сопряженные величины p и q имеют случайные значения, характеризуемые такими вероятностными распределениями, что произведение соответствующих дисперсий всегда больше или равно $h/4\pi$.

Таким образом, теорема о дисперсиях, как и качественные соотношения Гейзенберга, приводит к выводу, что в одном акте измерения невозможно получить точные значения двух канонически сопряженных величин p и q , ибо, если бы после измерения величины p и q были известны точно, мы имели бы $\sigma_q = 0$, $\sigma_p = 0$, а это противоречит соотношению $\sigma_q \cdot \sigma_p \geq h/4\pi$. После такого измерения состояние наших знаний уже нельзя было бы представлять функцией ψ , ибо такое представление связано с соотношением $\sigma_q \cdot \sigma_p \geq h/4\pi$.

Я столь долго останавливаюсь на данном вопросе потому, что могут показаться логичными следующие рассуждения. Возьмем большое число систем, находящихся в одном и том же состоянии, т.е. описываемых одной и той же функцией ψ , и будем одновременно измерять сопряженные величины p и q . Как мы знаем, для каждой системы мы можем получить различные значения с разными вероятностями, которые могут быть вычислены по известной функции ψ . В связи с этим можно было бы думать, что теорема о дисперсиях требует лишь, чтобы произведение дисперсий величин p и q было больше или равно $h/4\pi$, но не запрещает получать при некоторых измерениях одновременно точные значения p и q . Ошибка таких рассуждений состоит в том, что рассматриваются лишь вероятности до измерения (характеризуемые функцией ψ перед измерением). Но необходимо, чтобы и после измерения состояние можно было характеризовать волновой функцией ψ и чтобы теорема о дисперсиях выполнялась для соответствующего распределения вероятностей. Именно это требование позволяет сделать на основании теоремы о дисперсиях вывод о невозможности одновременного измерения p и q .

4. РАЗЛИЧНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯХ. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ С «РЕЗКИМИ ГРАНИЦАМИ»

Чтобы уточнить характер неопределенностей δp и δq , входящих в качественные соотношения Гейзенберга, рассмотрим все поподробнее.

Пусть имеется наблюдаемая величина A . Для системы в заданном состоянии ψ разные значения величины A имеют вполне определенные вероятности,

которые на основании общих принципов волновой механики можно вычислить по известной функции ψ . Уточним понятие неопределенности в смысле Гейзенберга: будем называть неопределенностью величины A в состоянии ψ наименьший интервал δA значений наблюдаемой A , содержащий все значения величины A , полная вероятность которых превышает $1 - \varepsilon$, где ε — очень малое число (например, $\varepsilon = 1/1000$). Измерение величины A почти с определенностью даст значение, лежащее в интервале δA . Такое определение зависит от выбранного значения ε , но если число ε раз и навсегда выбрано, то понятие неопределенности будет совершенно четким.

Если принять данное определение, то исследование разложений Фурье приводит к следующему. Пусть δA и δB — неопределенности в состоянии ψ для двух канонически сопряженных величин A и B , так что

$$\delta A \cdot \delta B \geq \alpha(\varepsilon) \hbar, \quad (25)$$

где $\alpha(\varepsilon)$ — число, по порядку величины равное по меньшей мере единице, точное значение которого зависит от ε . Чем меньше ε , тем больше α . При малых значениях ε , которые принимают (зачастую не оговаривая этого) на практике, величина $\alpha(\varepsilon)$ близка к единице. При этом мы снова получим с некоторыми уточнениями соотношение Гейзенберга.

Можно предположить, что один из определенных выше интервалов δA и δB имеет «резкие границы», т.е. что вероятность нахождения значений величины A (или B) вне интервала δA (или δB) равна нулю; при этом можно принять $\varepsilon = 0$.

В таком случае можно показать, что $\alpha(\varepsilon) = \alpha(0) = \infty$ и что $\delta A \cdot \delta B = \infty$. Это можно сделать снова путем исследования разложения Фурье (мы приведем пример немного погодя). Если волна ψ отлична от нуля лишь в интервале Δx (интервал с резкими границами), то в разложение Фурье функции ψ будут входить все значения p_x , так что $\Delta p_x = \infty$. Поэтому $\Delta x \cdot \Delta p_x = \Delta x \cdot \infty = \infty$.

Но этот результат, точный с математической точки зрения, не представляет особого интереса с практической точки зрения, поскольку, вообще говоря, ниже определенного значения ε вероятность практически равна нулю.

По этой причине соотношение Гейзенберга $\delta A \cdot \delta B \geq \alpha \hbar$ с коэффициентом α , близким к единице, практически всегда выполняется, даже если один из интервалов δA и δB имеет резкие границы.

Поясним аналогией. В теории ширины спектральных линий доказывалось, что профиль линии в частотном спектре имеет следующий вид:

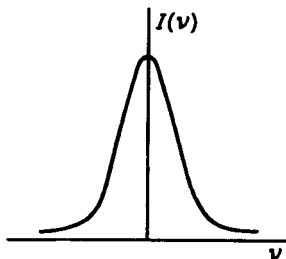


Рис. 6

Теоретически ширина линии бесконечно велика, но этот математически строгий результат не имеет реального значения, поскольку при уменьшении интенсивности $I(\nu)$ ниже некоторого уровня она *практически* равна нулю, ибо ее невозможно зарегистрировать. На практике спектральные линии не простираются по всему спектру, а имеют довольно определенную ширину.

Примеры неопределенностей с резкими границами

Чтобы проиллюстрировать сказанное, рассмотрим простой пример неопределенностей с резкими границами. Возьмем волновую функцию вида

$$\psi = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a \text{ и } x > b, \\ \frac{\exp(-ik_0x)}{\sqrt{b-a}} & \text{при } a < x < b. \end{cases} \quad (26)$$

Множитель $1/\sqrt{b-a}$ обеспечивает нормировку волны

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1.$$

Между границами интервала $x = a$ и $x = b$ наша волновая функция ψ имеет вид монохроматической волны, а вне интервала с резкими границами $\psi = 0$. Если измерить координату x , то она с определенностью окажется в интервале от a до b ($\Delta x = b - a$ с $\varepsilon = 0$).

Положим $k_0 = (2\pi/h)p_0$ и $k = (2\pi/h)p$ и найдем разложение Фурье для ψ . Имеем

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} c(k) \exp(-ikx) dk, \quad (27)$$

$$c(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \frac{\exp[i(k - k_0)x]}{\sqrt{b-a}} dx,$$

откуда

$$c(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(b-a)}} \frac{1}{i(k - k_0)} \{ \exp[i(k - k_0)b] - \exp[i(k - k_0)a] \},$$

$$|c(k)|^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{b-a} \frac{1}{(k - k_0)^2} 2[1 - \cos(k - k_0)(b - a)] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{4}{(b-a)(k - k_0)^2} \sin^2 \left[\frac{(k - k_0)(b - a)}{2} \right]$$

и, следовательно¹⁾,

$$|c(k)|^2 = \frac{b-a}{2\pi} \frac{\sin^2 u}{u^2}, \quad u = \frac{(k-k_0)(b-a)}{2}. \quad (28)$$

Таким образом, $|c(k)|^2$ обращается точно в нуль лишь при бесконечных значениях k . Следовательно, интервалу с резкими границами для величины x соответствует бесконечный интервал для k (или для p). Поэтому, если положить $\varepsilon = 0$, то $\Delta x = b - a$ и $\Delta p_x = \infty$, откуда

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = \infty.$$

Величина $|c(k)|^2$ быстро убывает при удалении k от k_0 , но еще заметно отлична от нуля при $u > \pi$, т.е. при

$$\Delta k > 2\pi/(b-a).$$

Поэтому мы с полной определенностью имеем $\Delta x \cdot \Delta k > 2\pi$, т.е. $\Delta x \cdot \Delta p > h$. Но при дальнейшем удалении k от k_0 величина $|c(k)|^2$ быстро убывает. Вычисления показывают, что $|c(k)|^2 \sim 10^{-2}|c(k_0)|^2$ при $\Delta p \cdot \Delta x = 3h$ и $|c(k)|^2 \sim 10^{-3}|c(k_0)|^2$ при $\Delta p \cdot \Delta x = 9h$. Поэтому, хотя $|c(k)|^2$ обращается в нуль лишь при $k = \infty$, на практике измерения величины p всегда дают для нее значение, попадающее в интервал Δp (около значения $p = p_0 = hk_0/2\pi$), так что $\Delta p \cdot (b-a) = \Delta p \cdot \Delta x = \alpha h$, где $\alpha \approx 1$, а только это и важно при практическом применении соотношений неопределенностей.

Микроскоп Гейзенберга. Рассмотрим снова пример с микроскопом Гейзенберга. Здесь Δp_x — интервал с резкими границами, поскольку он определяется апертурой микроскопа. В противоположность этому Δx — интервал без резких границ, теоретически равный бесконечности, поскольку величина Δx определяется дифракцией, ставящей предел разрешающей способности. Волна, приходящая в точку p' плоскости изображения, в принципе приходит не только из одной точки p в плоскости объекта. Она может прийти от любой точки в плоскости объекта, и Δx в принципе не имеет границ, но на практике, как показывает теория разрешающей способности, неопределенность Δx положения точки P ограничивается ближайшей окрестностью точки, геометрическим изображением которой является точка p' .

Экран с отверстием. Перейдем к примеру экрана с отверстием. Здесь интервал Δx определяется границами отверстия и потому имеет резкие границы. За экраном свет дифрагирует во всех направлениях, так что интервал Δp_x в принципе бесконечен, но полосы, которые можно практически наблюдать, лежат поблизости от геометрической тени. Следовательно, на практике интервал Δp_x весьма ограничен.

¹⁾ Нетрудно убедиться, что $\int_{-\infty}^{\infty} |c(k)|^2 dk = 1$. — Л. Б.

Гауссов волновой пакет. Для гауссова волнового пакета имеем

$$|\psi|^2 = C^2 \exp(-q^2/2\sigma_q^2), \quad |C(p)|^2 = C'^2 \exp(-p^2/2\sigma_p^2), \quad (29)$$

где $\sigma_q \cdot \sigma_p = h/4\pi$. Поэтому гауссов волновой пакет не имеет резких границ ни по q , ни по p .

Положим $\delta q = m\sigma_q$ и $\delta p = m\sigma_p$, и пусть

$$\varepsilon = 2 \int_{m\sigma_q/2}^{\infty} |\psi|^2 dq = 2 \int_{m\sigma_p/2}^{\infty} |C(p)|^2 dp.$$

Тогда δq и δp — неопределенности, соответствующие данному значению величины ε , согласно нашему определению неопределенностей, причем ε является функцией величины m и наоборот. При заданном значении ε величина m фиксирована и мы имеем

$$\delta q \cdot \delta p = m^2 \sigma_q \sigma_p = m^2 \frac{h}{4\pi}. \quad (30)$$

Если $\varepsilon \rightarrow 0$, то $m \rightarrow \infty$ и $\delta q \cdot \delta p \rightarrow \infty$. Но на практике достаточно принять, что величина ε очень мала. Такое предположение будет правильным уже при $m = 4\pi$, поскольку

$$|\psi(\sqrt{4\pi}\sigma_q)|^2 = e^{-2\pi} |\psi(0)|^2 \ll |\psi(0)|^2,$$

$$|C(\sqrt{4\pi}\sigma_p)| = e^{-2\pi} |C(0)|^2 \ll |C(0)|^2,$$

ибо $e^{-6} \approx 1/350$. Таким образом, на практике $\delta q \cdot \delta p \approx h$.

Резюме. Точное определение неопределенности Гейзенберга величины A таково: это такой интервал δA значений величины A , что вероятность получить значение величины A , лежащее за его пределами, меньше некоей малой величины ε . При таком определении для двух канонически сопряженных величин A и B выполняется соотношение $\delta A \cdot \delta B \approx \alpha(\varepsilon)h$, где $\alpha(\varepsilon)$ зависит от выбора ε . Величина $\alpha(\varepsilon)$ бесконечно большая, если $\varepsilon = 0$, так что в этом случае $\delta A \cdot \delta B = \infty$. Это означает, что если интервал δA конечен, то интервал δB бесконечен (случай интервалов с резкими границами). Однако на практике достаточно выбрать величину ε очень малой, но не равной нулю. Тогда произведение $\delta A \cdot \delta B$ в благоприятных случаях сможет уменьшаться до величины порядка h , но не ниже. Поэтому на практике $\delta A \cdot \delta B \geq h$ по порядку величины. С аналогичным положением мы встречаемся при анализе дифракции и разрешающей способности.

Теорема о дисперсиях, которая в случае сопряженных величин выражается соотношением $\sigma_A \cdot \sigma_B \geq h/4\pi$, точнее соотношения неопределенностей Гейзенберга. Как и из этого соотношения, из нее следует, что для двух канониче-

ски сопряженных величин нельзя получить одновременно точные значения в одном акте измерения¹⁾.

Составляющие углового момента

Мы рассмотрели случай канонически сопряженных величин — частный случай некоммутирующих величин, когда коммутатор равен единице. Но мы знаем, что существует и другой вид некоммутирующих действительных величин, коммутатор которых есть ненулевой оператор. К числу таких величин относятся составляющие углового момента, для которых

$$[M_x, M_y] = \frac{\hbar}{2\pi i} M_z \text{ и т.д.}$$

¹⁾ Случай, когда соотношение неопределенностей выполняется, хотя произведение дисперсий бесконечно.

Пусть волновой пакет имеет вид

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \exp(-\gamma x/2) \exp(2\pi i k_0 x) & \text{при } x > 0 \quad (\gamma > 0). \end{cases}$$

Если положить

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(k) e^{2\pi i k x} dk,$$

то получим

$$c(k) = \frac{1}{2\pi i(k - k_0) + \gamma/2}.$$

Поэтому

$$|\psi(x)|^2 = e^{-\gamma x}, \quad |c(k)|^2 = \frac{1}{4\pi^2(k - k_0)^2 + \gamma^2/4}.$$

Мы можем принять следующее определение неопределенностей δx и δk :

$$e^{-\gamma \delta x} = \frac{1}{N}, \quad \frac{1}{4\pi^2(\delta k)^2 + \gamma^2/4} = \frac{4}{N\gamma^2},$$

где N — очень большое число, откуда $\delta x = (1/\gamma) \ln N$, $\delta k \approx (\gamma/4\pi) \sqrt{N}$. Таким образом, имеем $\delta x \cdot \delta k = (1/4\pi) \sqrt{N} \ln N$, или, если $k = p_x/\hbar$, $\delta x \cdot \delta p_x = (\hbar/4\pi) \sqrt{N} \ln N$. При $N = 20$ имеем $\delta x \cdot \delta p_x \approx \hbar$. В то же время $\sigma_{p_x} = \infty$, поскольку интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_x^2 c(p_x) dp_x$$

расходится. Для σ_x находим значение $1/\gamma$. Поэтому $\sigma_{p_x} \cdot \sigma_x = \infty$, что намного больше величины $\hbar/4\pi$. Здесь теорема о дисперсиях ничего не дает, тогда как соотношение неопределенностей по-прежнему выполняется. — Л. Б.

Из теоремы о дисперсиях следует, что

$$\sigma_{M_x} \cdot \sigma_{M_y} \geq \frac{1}{2} |\overline{[M_x, M_y]}| = \frac{h}{4\pi} \overline{M_z} \text{ и т.д.}$$

Возникает вопрос, существуют ли для M_x , M_y , M_z соотношения неопределенностей?

Разумеется, можно, как и в предыдущем случае, принять определение неопределенностей δM_x , ... , взяв очень малое число ε . Однако заранее ничего нельзя сказать о величине такого произведения, как $\delta M_x \cdot \delta M_y$. Но, поскольку вероятность стандартного отклонения всегда довольно велика, чаще всего величина δM_x будет больше σ_{M_x} , а δM_y — больше σ_{M_y} , откуда следует, что

$$\delta M_x \cdot \delta M_y \geq (h/4\pi) \overline{M_z}.$$

Мы покажем еще, что не могут одновременно выполняться условия $\overline{M_z} \neq 0$ и $\delta M_x \cdot \delta M_y = 0$.

В самом деле, чтобы выполнялось условие $\overline{M_z} \neq 0$, в разложении ψ по собственным функциям оператора M_z должна быть по меньшей мере одна собственная функция с собственным значением, отличным от нуля. Такая собственная функция оператора M_z не может быть в то же время собственной функцией оператора M_x или M_y , поскольку единственной собственной функцией, общей для M_z и M_x (или M_y) является величина $f = 0$. Поэтому если разложить ψ по собственным функциям оператора M_x (или M_y), то в таком разложении будут по меньшей мере две собственные функции оператора M_x (или M_y) с разными собственными значениями. Отсюда следует, что величины δM_x и δM_y отличны от нуля. Поэтому условия $\overline{M_z} \neq 0$ и $\delta M_x \cdot \delta M_y = 0$ не могут выполняться одновременно.

Отметим *другие различия* между случаем некоммутирующих величин первого типа и случаем некоммутирующих величин второго типа.

Пусть система, первоначально находящаяся в состоянии 1, характеризуется волновой функцией ψ_1 , и пусть A и B — две наблюдаемые этой системы.

Предположим, что некоторая операция измерения переводит систему в состояние 2, характеризуемое некоторой волновой функцией ψ_2 .

До измерения имеем

$$\sigma_A^{(1)} \cdot \sigma_B^{(1)} \geq \frac{1}{2} |\overline{(AB - BA)}|_1.$$

После измерения

$$\sigma_A^{(2)} \cdot \sigma_B^{(2)} \geq \frac{1}{2} |\overline{(AB - BA)}|_2.$$

Если A и B канонически сопряжены или, в более общем случае, если коммутатор $[A, B]$ кратен единице, то его среднее значение $\overline{[A, B]}$ есть постоянная, не зависящая от состояния. В таком случае произведения $\sigma_A^{(1)} \cdot \sigma_B^{(1)}$ и $\sigma_A^{(2)} \cdot \sigma_B^{(2)}$ имеют один и тот же нижний предел.

Если же $AB - BA$ есть некий оператор C , то среднее значение $\overline{[A, B]}$ в общем случае зависит от рассматриваемого состояния, и если в состоянии 2 выполняется соотношение

$$|\overline{[A, B]}_2| < |\overline{[A, B]}_1|,$$

то может оказаться, что

$$\sigma_A^{(2)} \cdot \sigma_B^{(2)} < \frac{1}{2} |\overline{(AB - BA)}_1|,$$

хотя

$$\sigma_A^{(2)} \cdot \sigma_B^{(2)} > \frac{1}{2} |\overline{(AB - BA)}_2|.$$

Другими словами, нижняя граница произведения $\sigma_A^{(2)} \cdot \sigma_B^{(2)}$ после измерения определяется состоянием, существующим после данного измерения, а не начальным состоянием.

Применим это к случаю, когда $A = M_x$, $B = M_y$ и $[A, B] = (h/2\pi i)M_z$. Если в состоянии 1 выполняется условие $\overline{M}_z \neq 0$, то $\sigma_{M_x}^{(1)} \cdot \sigma_{M_y}^{(1)} > 0$. Но измерение может привести к состоянию 2, в котором $\overline{M}_z = 0$ и $\sigma_{M_x}^{(2)} \cdot \sigma_{M_y}^{(2)} = 0$, т.е. к состоянию, в котором величины M_x и M_y имеют точные значения, а именно $M_x = M_y = 0$. В этом состоит большое отличие от случая канонически сопряженных величин, где никакое измерение не может привести систему в состояние, в котором обе величины имели бы точные значения.

В начальном состоянии 1 для величин A и B имеются определенные распределения вероятностей, которые можно вычислить, зная функцию ψ_1 . Пусть δA и δB — два произвольно выбранных интервала значений для наблюдаемых A и B . Вообще говоря, эти интервалы для состояния 1 не будут неопределенностями в указанном выше точном смысле. Но допустим, что путем измерения мы установили, что вероятности нахождения значения величины A вне δA и величины B вне δB обе меньше ε . Тогда в состоянии ψ_2 , которое мы имеем после измерения, величины δA и δB станут неопределенностями в указанном выше смысле и будет выполняться соотношение

$$\delta A \cdot \delta B \geq \frac{1}{2} |\overline{[A, B]}_2| \alpha,$$

где α — числовая функция величины ε , по меньшей мере порядка единицы.

Если A и B канонически сопряжены, то мы снова находим соотношения Гейзенберга, таким путем доказав, что никакое измерение не может дать более точные значения величин A и B , чем допускается этими соотношениями, поскольку в противном случае состояние 2, возникающее в результате измерения, не может быть представлено в волновой механике.

Если A и B таковы, что $[A, B] = C$, то нижняя граница произведения

$\delta A \cdot \delta B$ может меняться с изменением состояния и после измерения эта граница определяется значением величины $(AB - BA)_2$ ¹⁾.

¹⁾ В дальнейшем Луи де Бройль никогда не публиковал столь исчерпывающего анализа соотношений неопределенностей, и мне представляется, что в мировой литературе вряд ли можно найти другую работу, воспроизводящую практически все рассуждения (по данному вопросу) Гейзенберга и Бора, причем здесь они дополнены рассуждениями самого де Бройля. Обратим внимание на его характерную черту, на то, как тщательно он различает информацию о состоянии системы *до* измерения и информацию о состоянии системы *после* измерения. Такое различие готовит почву для той интерпретации соотношений неопределенностей, которую он дал позднее [II, 27, 29 и 33]. Главная идея такой интерпретации заключается в следующем. Коль скоро частица предполагается всегда локализованной в некоторой точке волны, возможное измерение ее координаты может выявить лишь то положение частицы, которое существовало ранее, так что неопределенность Δx существует в начальном состоянии системы до каких-либо измерений (координаты или другой величины), это *фактическая* неопределенность. В противоположность этому измерение составляющей импульса p_x , требующее некой подготовки системы, дает не начальное значение импульса, а то его значение, к которому приводит подготовка, так что Δp_x не есть фактическая неопределенность. Это — «неопределенность значения, которое может иметь p_x после действия прибора для измерения p_x , *предвидимая* в начальном состоянии, когда результат измерения еще не известен». — Ж. Л.

Глава IX

Четвертое соотношение неопределенностей Гейзенберга

1. ОТСУТСТВИЕ СИММЕТРИИ МЕЖДУ ПРОСТРАНСТВОМ И ВРЕМЕНЕМ В ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКЕ

Если исходить из релятивистских представлений, то в виде естественного дополнения к трем первым соотношениям

$$\delta p_i \delta x_i \sim h$$

появляется четвертое соотношение неопределенностей Гейзенберга

$$\delta W \cdot \delta t \sim h,$$

поскольку в теории относительности энергия рассматривается как величина, канонически сопряженная по отношению ко времени, в том же смысле, в каком составляющие p_x, p_y, p_z импульса являются канонически сопряженными величинами по отношению к переменным x, y, z . Это видно, например, из того, что приращение действия

$$W dt - p_x dx - p_y dy - p_z dz$$

является пространственно-временным инвариантом.

Однако в волновой механике, по крайней мере при современном состоянии теории, симметрия между четвертым соотношением неопределенности и тремя первыми носит скорее внешний характер. В самом деле, волновая механика даже в релятивистской (на первый взгляд) форме Дирака не устанавливает истинной симметрии между пространственными и временными переменными. Координаты x, y, z частицы считаются наблюдаемыми, соответствующими неким операторам и имеющими в любом состоянии (описываемом волновой функцией ψ) некоторое вероятностное распределение значений, тогда как время t по-прежнему считается вполне детерминированной величиной¹⁾.

¹⁾ Подробное изложение вопросов, относящихся к четвертому соотношению неопределенностей и к проблеме времени в теории относительности и волновой механике, можно найти в «Магнитном электроде» [II, 11]. В работе «Определенности и неопределенности науки» [III, 8] можно ознакомиться с анализом возможной (но оспариваемой автором) связи между четвертым соотношением и пятым, связывающим фазу световой волны с числом заполнения: $\delta N \cdot \delta \Phi \geq 1$. — Ж. Л.

Это можно уточнить следующим образом. Представим себе галилеева наблюдателя, проводящего измерения. Он пользуется координатами x, y, z, t , наблюдая события в своей макроскопической системе отсчета. Переменные x, y, z, t — это числовые параметры, и именно эти числа входят в волновое уравнение и в волновую функцию. Но каждой частице атомной физики соответствуют «наблюдаемые величины», которые являются координатами частицы. Связь между наблюдаемыми величинами x, y, z и пространственными координатами x, y, z галилеева наблюдателя носит статистический характер; каждой из величин x, y, z в общем случае может соответствовать целый набор значений с некоторым распределением вероятностей. Что же касается времени, то в современной волновой механике нет «наблюдаемой величины» t , связанной с частицей. Есть лишь переменная t , одна из пространственно-временных переменных наблюдателя, определяемая по часам (существенно макроскопическим), которые имеются у этого наблюдателя.

В волновой механике необходимо иметь «переменную эволюции», которая позволяла бы следить за изменением состояния квантовых систем. Но эволюция состояния системы или, точнее, того, что нам известно о нем, с необходимостью протекает в том времени, которое существует в сознании наблюдателя и течение которого мы можем определять лишь по макроскопическим часам. Именно в этом времени, связанном с сознанием наблюдателя, происходят скачкообразные изменения вида функции ψ , вызванные операциями измерения и информацией, которую дают такие операции. Но поскольку мы вынуждены брать в качестве эволюционной переменной макроскопическое время (переменную t релятивистского пространства-времени), мы не можем приписывать частицам или квантовым системам некую «наблюдаемую величину» t вероятностного характера, как мы ставим в соответствие координатам q «наблюдаемые величины» с неким распределением вероятностей значений. Таковы некоторые из очень глубоких причин, по которым, на мой взгляд, трудно установить в волновой механике ту симметрию между пространством и временем, которая постулируется в теории относительности. Эти трудности тесно связаны с тем обстоятельством, что в квантовой физике возникает связь нового характера между объективным и субъективным. «Состояние» квантовой системы в новой теории уже не имеет объективного характера, соответствующего описанию «того, что есть». В противоположность этому оно определяется только «тем, что мы знаем». Оно есть некое представление наших знаний, и мы не можем выйти за пределы этого представления. Именно в сознании наблюдателя, а следовательно, и в макроскопическом времени происходит эволюция «состояния», описываемого волновой функцией ψ , и если в квантовых теориях не удастся установить симметрию между пространством и временем, то это, по-видимому, связано с особым характером времени, воспринимаемого сознанием, с непрерывностью его течения и с его необратимостью¹⁾.

¹⁾ Если бы мы захотели рассматривать энергию как наблюдаемую величину, соответствующую оператору $(\hbar/2\pi i)\partial/\partial t$, то мы получили бы уравнение на собственные значения $(\hbar/2\pi i)\partial\varphi/\partial t = E\varphi$ и квантования энергии не было бы, так как энергия E могла бы принимать все возможные значения от $-\infty$ до $+\infty$. — Л. Б.

2. ПРАВИЛЬНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЧЕТВЕРТОГО СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Теперь нам нужно правильно интерпретировать четвертое соотношение неопределенностей. При этом мы четко сформулируем то, что ранее уже неявно допустили.

Рассмотрим волновой пакет ψ ограниченных размеров, занимающий область R трехмерного пространства. Значение координаты x частицы является неопределенным, но может стать известным в результате измерения как соответствующее любому положению в области R с вероятностью, пропорциональной $|\psi|^2$. Вероятность же получить заданное значение для p_x равна $|\rho(p_x)|^2$, так что значение p_x тоже является неопределенным. Мы знаем, что произведение $\delta p_x \cdot \delta x$ неопределенностей в смысле Гейзенберга по порядку величины равно \hbar . Но если путем измерения можно определить координату x частицы, то нельзя говорить об измерении ее времени t , поскольку в волновой механике время t есть макроскопическое время наблюдателя, всегда имеющее определенное значение.

Что же тогда означает соотношение $\delta E \cdot \delta t \sim \hbar$? Оно означает следующее: чтобы приписать частице энергию E с неопределенностью δE , необходимо провести наблюдение, т.е. операцию измерения, на протяжении по меньшей мере времени $\delta t \sim \hbar/\delta E$. В самом деле, из проведенного нами анализа разложения Фурье для волнового пакета следует, что продолжительность δt прохождения пакета через некоторую точку есть по меньшей мере величина порядка $\delta t = 1/\delta \nu$. Чтобы убедиться в том, что неопределенность энергии не превышает $\delta E = \hbar \delta \nu$, необходимо зарегистрировать в некоей точке P прохождение переднего и заднего фронтов волнового пакета, а для этого нужно, чтобы длительность наблюдения была не меньше $\delta t \sim 1/\delta \nu$. В частности, чтобы можно было утверждать, что $\delta E = 0$, т.е. что волновой пакет является монохроматическим, необходимо проводить наблюдение в течение бесконечного промежутка времени, поскольку протяженность монохроматической волны бесконечна.

Таким образом, если три первых соотношения неопределенностей выражают факт существования распределения вероятностей для величин q и p , т.е. то обстоятельство, что эти величины являются «случайными переменными» в смысле теории вероятностей, то четвертое соотношение неопределенностей следует интерпретировать иначе. Время не является случайной переменной, но измерить энергию E можно лишь путем наблюдений конечной продолжительности, и чем меньше время наблюдения, тем больше неопределенность в значении E . Поскольку переменная t не является случайной переменной, у нее нет и дисперсии, так что четвертому качественному соотношению неопределенностей $\delta E \cdot \delta t \geq \hbar$ не отвечает точное соотношение для дисперсий вида $\sigma_E \cdot \sigma_t \geq \hbar/4\pi$. Коль скоро t есть переменная с точным значением, ее дисперсия σ_t равна нулю. Нетрудно видеть различие между сделанными выводами и релятивистской симметрией пространства и времени.

3. ИЛЛЮСТРАЦИЯ К ПРЕДЛОЖЕННОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

В качестве иллюстрации, поясняющей смысл четвертого соотношения неопределенностей, рассмотрим пример, на который указал в несколько иной форме Леннойе [16] в своей статье, посвященной оптическому резонансу.

Рассмотрим дифракционную решетку с полным числом штрихов, равным N (N очень велико). Период решетки равен a . Пусть по нормали к решетке падает свет с длиной волны λ ($\lambda = c/\nu$).

Свет, рассеиваемый двумя соседними штрихами решетки в направлении, образующем угол θ с нормалью, имеет разность фаз $(2\pi/\lambda)a \sin \theta$. Поэтому амплитуда света, рассеиваемого в направлении θ , на бесконечности пропорциональна $\sum_{n=0}^{N-1} e^{inu}$, где $u = (2\pi/\lambda)a \sin \theta$, т.е. пропорциональна отношению $(e^{iNu} - 1)/(e^{iu} - 1)$. Следовательно, соответствующая интенсивность (квадрат модуля амплитуды) будет пропорциональна величине

$$\left| \frac{e^{iNu} - 1}{e^{iu} - 1} \right|^2 = \frac{1 - \cos Nu}{1 - \cos u} = \frac{\sin^2(Nu/2)}{\sin^2(u/2)}. \quad (1)$$

Этот классический результат показывает, что возникают максимумы интенсивности в направлениях, для которых $u/2 = m\pi$ (m целое), т.е. $\sin \theta_m = m(\lambda/a) = (m/a)(c/\nu)$. Поэтому можно определить частоту ν (а следовательно, и энергию фотонов $E = h\nu$), наблюдая угол θ_m , который соответствует m -му максимуму. Но при этом останется некоторая неопределенность значения ν (или E), поскольку угол θ_m никогда нельзя определить точно. Исследуем этот вопрос.

Выражение

$$I = \frac{\sin^2(Nu/2)}{\sin^2(u/2)}$$

достигает максимума, равного N^2 , при $u/2 = m\pi$. При значениях $u/2$, равных $m\pi + \eta$, величина I будет равна

$$I = \frac{\sin^2 N(m\pi + \eta)}{\sin^2 \eta}.$$

При $\eta = \pi/N$ (число N предполагается большим) имеем

$$I = \frac{\sin^2(Nm\pi + \pi)}{\sin^2(\pi/N)} = 0.$$

Таким образом, I изменяется от максимального значения N^2 до 0. Поэтому ошибка, возможная при измерении θ_m , всегда такова, что $\delta(u/2)$ может достигать некой доли π/N . Поскольку $\delta(u/2) = \pi(a \sin \theta / c) \delta \nu$, то можно видеть, что неопределенность $\delta \nu$ величины ν , измеряемой таким путем, может достигать некой доли числа $c/N a \sin \theta$. Поэтому $\delta \nu \sim c/N a \sin \theta$.

Пусть теперь δt — ограниченная длительность эксперимента. Чтобы все штрихи дифракционной решетки оказывали свое влияние и, следовательно, чтобы все изложенное выше было справедливо, нужно, чтобы свет, рассеиваемый N -м штрихом решетки в направлении θ , мог опередить фронт волны P , а для этого должно выполняться условие

$$\delta t \geq N \sin \theta / c$$

или по порядку величины

$$\delta \nu \cdot \delta t \geq \frac{c}{N \sin \theta} \frac{N \sin \theta}{c} = 1$$

и по порядку величины

$$\delta E \cdot \delta t \geq h.$$

Здесь хорошо видно, что при измерении энергии фотона $E = h\nu$ важна *продолжительность* опыта δt . Поэтому в четвертом соотношении неопределенностей величина δt имеет физический смысл *продолжительности* эксперимента, оцениваемой наблюдателем, который проводит эксперимент.

Пример Дарвина

Дарвин [17] рассматривает электрон, который покоится, но может перемещаться по прямой. В одной из точек прямой находится электрометр, который путем измерения электрического поля дает возможность определить положение x электрона. Для упрощения анализа Дарвин принимает, что электрометром служит один атом, а принцип действия электрометра основан на эффекте Штарка. Атом может испускать спектральную линию, переходя с энергетического уровня $E_1 + M_1 \mathcal{E}$ на уровень $E_2 + M_2 \mathcal{E}$. Здесь E_1 и E_2 — энергии уровней в отсутствие электрического поля \mathcal{E} , а M_1 и M_2 — электрические моменты атома до и после перехода.

Чтобы измерить поле \mathcal{E} с точностью $\delta \mathcal{E}$, необходимо иметь возможность различить две частоты, разность которых равна $|M_1 - M_2|(\delta \mathcal{E}/h)$. Для этого нужно затратить время δt , для которого $\delta \nu \cdot \delta t \sim 1$, т.е.

$$\delta t \geq \frac{h}{|M_1 - M_2| \delta \mathcal{E}}. \quad (2)$$

В результате мы приходим к четвертому соотношению неопределенностей.

Продолжим рассуждения. В некоторый неизвестный нам момент времени атом-электрометр переходит из состояния 1 в состояние 2. Этот переход оказывает влияние на электрон, на который сначала действовал электрический момент M_1 , а затем — с некоего неизвестного момента времени — электрический момент M_2 . Чтобы компенсировать это изменение воздействия, мы можем создать в месте расположения электрона постоянное поле, эквивалентное наличию в месте нахождения электрометра электрического момента, равного $(M_1 + M_2)/2$. Но даже при такой компенсации вначале будет

иметься остаточный момент, равный $\frac{1}{2}(M_1 - M_2)$, а в конце — остаточный момент, равный $\frac{1}{2}(M_2 - M_1)$. В связи с этим истинный электрический момент атома-электрометра в какой-либо момент времени будет задаваться с неопределенностью, по порядку величины равной $|M_2 - M_1|$. Дарвин добавляет: «То обстоятельство, что невозможны наблюдения без неопределенностей, иллюстрируется наличием спектральных линий, для которых $M_1 = M_2$. Для таких линий реакция на электрон будет в точности скомпенсирована, но такая линия не обнаруживает эффекта Штарка и непригодна для электрометрических измерений».

Чтобы измерить положение x электрона с неопределенностью δx , нужно измерить электрическое поле с неопределенностью $\delta(e/r^2) = e \delta x/r^3$. Как мы видели, для этого нужно проводить наблюдения в течение времени δt , такого, что

$$\delta t \geq \frac{h}{|M_1 - M_2| \delta e} = \frac{hr^3}{e \delta x |M_1 - M_2|}. \quad (3)$$

В течение этого времени на электрон будет действовать поле, эквивалентное наличию в электрометре электрического момента M , по порядку величины равного по меньшей мере $|M_1 - M_2|$. Значит, на электрон будет действовать сила $e(M/r^3) \geq (e/r^3)|M_1 - M_2|$. За время δt эта сила изменит импульс электрона p_x на величину

$$\delta p_x = \frac{eM}{r^3} \delta t \geq \frac{e}{r^3} |M_1 - M_2| \frac{hr^3}{e \delta x |M_1 - M_2|} = \frac{h}{\delta x}; \quad (4)$$

отсюда по порядку величины имеем

$$\delta x \cdot \delta p_x \geq h.$$

Таким образом, мы пришли к первому соотношению неопределенностей, исходя из четвертого соотношения.

4. ЗАМЕЧАНИЯ О ЧЕТВЕРТОМ СООТНОШЕНИИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Сделаем несколько замечаний о четвертом соотношении неопределенностей. Начнем с очень давнего замечания Бора.

Как известно, если бомбардировать атомную систему быстрыми частицами, то можно вызвать ее возбуждение и даже ионизацию. С точки зрения классических представлений данное явление кажется непонятным. В самом деле, падающая частица проходит через атом со скоростью v . Поэтому если a — средний диаметр атома, то время прохождения частицы через атом по порядку величины будет равно самое большее a/v . Только в течение этого времени падающая частица может взаимодействовать с остальными частями

атома, передавая им энергию и вызывая возбуждение или ионизацию. Чтобы составные части атома могли поглотить энергию, необходимо, чтобы они могли заметно переместиться за время a/v . Для этого нужно, чтобы время $\tau = a/v$ было велико по сравнению с периодами колебаний электронов в атоме. Это легко видеть на примере гармонического осциллятора. Такой осциллятор имеет вполне определенный период T и под действием внешней возбуждающей силы колеблется с данным периодом. Чтобы внешняя сила могла передать осциллятору энергию, она должна действовать на него в течение промежутка времени, по порядку величины значительно превышающего T . Поэтому должно выполняться условие $\tau = a/v > T$ или $a > vT$; $v < av$. Но возбуждение и ионизация возможны лишь в том случае, если кинетическая энергия, передаваемая падающей частицей, по порядку величины будет равна $h\nu$. Если скорость v настолько мала, что можно пренебречь релятивистскими поправками (а здесь это обычный случай), то должно выполняться условие $mv^2 \sim h\nu$.

Рассмотрим сначала электрон, находящийся на внешней оболочке атома и, следовательно, характеризуемый частотой, по порядку величины равной частоте видимого света. В этом случае

$$a \approx 10^{-8} \text{ см}, \quad \nu \approx 10^{14} \text{ с}^{-1}.$$

Из условия $v < av$ следует, что $v < 10^6$ см/с, а из условия $mv^2 \sim h\nu$ имеем $v \sim \sqrt{h\nu/m} = 2,7 \cdot 10^7$ см/с. Таким образом, возникает противоречие. Возьмем тогда электрон, находящийся во внутренней оболочке атома, частота колебаний которого будет соответствовать частотам рентгеновских лучей. В этом случае $a \sim 10^{-9}$ см, $\nu \sim 10^{18}$. Условие $v < av$ приводит к $v < 10^9$ см/с, а из $mv^2 \sim h\nu$ следует $v \sim 2,7 \cdot 10^9$ см/с. Здесь тоже возникает противоречие. Мы видим, что классические представления об ударном возбуждении и ударной ионизации не приводят к удовлетворительному объяснению.

Иначе обстоит дело, если перейти к новым представлениям. Закон сохранения энергии может быть применен к процессу столкновения лишь в том случае, если кинетическая энергия падающей частицы известна с неопределенностью δE , намного меньшей, чем ее величина $E \sim h\nu$. Отсюда следует, что $\delta E \ll h\nu$. Но тогда волновой пакет, сопоставляемый с падающей частицей, будет довольно протяженным, и для его прохождения через атом необходимо время $\delta t \geq h/\delta E$. Поскольку внутри промежутка δt невозможно фиксировать момент падения частицы на атом, длительности прохождения τ нельзя приписать значение, меньшее чем δt . В связи с этим

$$\tau \sim h/\delta E \gg h/E = 1/\nu = T.$$

Условие $\tau \gg T$ можно считать выполняющимся, поскольку продолжительность взаимодействия падающей частицы с составными частями атома не может быть меньше продолжительности δt прохождения через атом волнового пакета, сопоставляемого с частицей.

Перейдем к другому замечанию. Пусть имеется квантовая система, описываемая волновой функцией $\psi = \sum_k c_k a_k \exp[(2\pi i/h)E_k t]$. Как уже говорилось выше, если в момент времени t измерить энергию, то мы должны получить

значение E_k с вероятностью $|c_k|^2$. Но теперь мы видим, что это утверждение не вполне корректно, поскольку для измерения энергии нам всегда требуется некоторое время (причем тем большее, чем более точным является измерение). Поэтому мы не можем говорить об измерении энергии в момент t , а можем говорить лишь об измерении в интервале времени δt , охватывающем момент t . При измерении импульса или координаты этого нет.

Тем не менее введенное таким путем ограничение не имеет большого значения на практике, поскольку мы можем утверждать, что величина E имеет значение E_k , если δE намного меньше самой малой из разностей $|E_{k-1} - E_k|$ и $|E_k - E_{k+1}|$. Разности же эти, даже если речь идет о состояниях, в которых электроны очень слабо связаны с ядром атома, соответствуют переходам, при которых испускается излучение с частотой, соответствующей по меньшей мере инфракрасной области спектра, т.е. по меньшей мере $\sim 10^{12} \text{ с}^{-1}$. Поэтому время наблюдения, необходимое для различения двух соседних квантовых состояний, по порядку величины будет не более

$$\delta t \sim h/\delta E \sim h/(h \cdot 10^{12}) = 10^{-12} \text{ с}.$$

Это очень малая величина, и мы можем считать, что измерения каждого из квантованных уровней энергии можно выполнить практически мгновенно. Сделаем еще несколько замечаний, важность которых будет видна в дальнейшем.

Пусть система имеет, например, два дискретных уровня энергии E_i и E_k . Предположим, что некое внешнее воздействие вызывает возмущение в системе и что, согласно вычислениям (которые будут уточнены в дальнейшем), в результате возмущения система осциллирует между состояниями E_i и E_k с частотой $\nu_{ik} = (E_i - E_k)/h$. Отсюда нельзя сделать вывода, что система в действительности переходит из состояния i в состояние k и наоборот. Мы могли бы это утверждать, если бы могли обнаружить систему в одном или другом из этих состояний, т.е. измерить ее энергию в одном или другом состоянии. Но, поскольку система пребывает в одном из этих состояний лишь в течение промежутка времени δt , меньшего, чем $1/\nu_{ik} = h/(E_i - E_k)$, никакими измерениями мы не можем определить энергию одного из состояний с точностью, превышающей

$$\delta E \sim h/\delta t \sim E_i - E_k.$$

Поэтому мы и не можем различить эти два состояния. В процессе взаимодействия энергия системы остается неопределенной в интервале от E_i до E_k , и установить выполнение закона сохранения энергии мы можем лишь с точностью до величины $|E_i - E_k|$.

Предположим теперь, что до момента времени t_1 система находится в состоянии с энергией E_1 , затем в промежутке времени от t_1 до t_2 испытывает внешнее воздействие и при $t > t_2$ оказывается в состоянии с энергией E_2 . Поскольку при измерении E_1 мы располагаем всем временем, предшествующим моменту t_1 , а при измерении E_2 — всем временем, следующим за моментом времени t_2 , мы можем очень точно измерить E_1 и E_2 , причем закон сохранения энергии требует равенства $E_2 = E_1$. Но в период $t_2 - t_1$ действия возму-

шающей силы система может перейти в промежуточное состояние E . Если время $t_2 - t_1$ мало по сравнению с $\hbar/(E - E_1)$, то невозможно обнаружить систему в состоянии E , измерив эту энергию. Можно сказать, что система переходит в «виртуальное» состояние E и что в действительности в процессе взаимодействия энергия имеет неопределенность $E - E_1$. Закон сохранения энергии относится в полному переходу $E_1 \rightarrow E_2$, но он не обязан выполняться для виртуальных переходов $E_1 \rightarrow E$ и $E \rightarrow E_2$.

Уточним все сказанное выше, кратко напомнив метод анализа малых возмущений, называемый методом вариации постоянных.

5. МЕТОД ВАРИАЦИИ ПОСТОЯННЫХ И ВЕРОЯТНОСТЬ ПЕРЕХОДА

Чтобы проиллюстрировать сказанное, мы кратко напомним метод вариации постоянных и понятие вероятности перехода.

В методе вариации постоянных рассматривается не зависящий от времени невозмущенный гамильтониан $H^{(0)}$, которому соответствуют стационарные состояния системы, рассматриваемой в отсутствие возмущения. Считается, что собственные значения $E_k^{(0)}$ и собственные функции $\psi_k^{(0)}$ этого гамильтониана известны. Принимается, что система испытывает возмущающее воздействие, которое может зависеть от времени и характеризуется членом V в гамильтониане, так что $H = H^{(0)} + V(t)$.

Следовательно, при наличии возмущения уравнение, описывающее эволюцию системы во времени, принимает вид

$$[H^{(0)} + V(t)]\psi = \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (5)$$

В любой момент t волновую функцию ψ системы можно разложить в ряд по полной системе собственных функций $\psi_k^{(0)}$ невозмущенного гамильтониана $H^{(0)}$ и записать в виде

$$\psi(t) = \sum_k c_k(t) \psi_k^{(0)} \exp[(2\pi i/\hbar)E_k^{(0)}t], \quad (6)$$

где

$$c_k(t) = \int_D \psi_k^{(0)*} \psi(t) \exp[-(2\pi i/\hbar)E_k^{(0)}t] d\tau. \quad (7)$$

Согласно общим принципам волновой механики, вероятность найти систему в момент t в состоянии $\psi_k^{(0)}$ пропорциональна величине $|c_k(t)|^2$. Наряду с этим, как мы отмечали выше, необходимо, чтобы система оставалась в этом состоянии в течение достаточно долгого времени, позволяющего достаточно точно измерить ее энергию. Волновая функция всегда предполагается нормированной, откуда следует, что

$$\sum_k |c_k|^2 = 1.$$

Подставив выражение для ψ в уравнение эволюции, с учетом того, что функции $\psi_k^{(0)}$ являются собственными функциями оператора $H^{(0)}$, получим

$$\sum_k \frac{dc_k}{dt} \psi_k^{(0)} \exp[(2\pi i/h)E_k^{(0)}t] = \frac{2\pi i}{h} \sum_k c_k(t) V(t) \psi_k^{(0)} \exp[(2\pi i/h)E_k^{(0)}t]. \quad (8)$$

Умножим обе части равенства на

$$\psi_l^{(0)*} \exp[-(2\pi i/h)E_l^{(0)}t]$$

и проинтегрируем по D . Учитывая ортонормированность функций $\psi_k^{(0)}$, получаем фундаментальное уравнение

$$\frac{dc_l}{dt} = \frac{2\pi i}{h} \sum_k V_{lk}(t) c_k(t) \exp[(2\pi i/h)(E_k^{(0)} - E_l^{(0)})t], \quad (9)$$

где

$$V_{lk}(t) = \int_D \psi_l^{(0)*} V(t) \psi_k^{(0)} d\tau. \quad (10)$$

При $V = 0$ величины c_l суть постоянные и волновая функция ψ равна сумме собственных функций оператора $H^{(0)}$ с постоянными коэффициентами — случай, нам известный. Если возмущение V отлично от нуля, то коэффициенты c_l меняются с течением времени, чем и объясняется название «метод вариации постоянных». (Как нетрудно убедиться,

$$\frac{d}{dt} \sum_k c_k c_k^* = 0,$$

т.е. в любой момент времени

$$\sum_k |c_k|^2 = \text{const} = 1.)$$

В общем случае интегрирование уравнений вариации постоянных — трудная задача; из этих уравнений можно извлечь различные следствия, на которых мы не будем подробно останавливаться. Ограничимся случаем, когда известно, что в момент времени $t = 0$ система находится в состоянии с индексом n , так что $c_n(0) = 1$ и $c_m(0) = 0$ при $m \neq n$.

Предполагая, что возмущение, представленное в гамильтониане оператором $V(t)$, мало, мы найдем решение уравнений вариации постоянных, которое будет приближенно справедливым в течение некоторого времени. Уравнения принимают вид

$$\frac{dc_m}{dt} = \frac{2\pi i}{h} V_{mn} \exp[(2\pi i/h)(E_n - E_m)t], \quad m \neq n. \quad (11)$$

Решение, соответствующее начальному условию $c_m(0) = 0$, таково:

$$c_m(t) = V_{mn} \frac{\exp[(2\pi i/h)(E_n - E_m)t] - 1}{E_n - E_m},$$

откуда

$$\begin{aligned} |c_m(t)|^2 &= \frac{2|V_{mn}|^2}{(E_n - E_m)^2} \left[1 - \cos \frac{2\pi}{h}(E_n - E_m)t \right] = \\ &= \frac{4|V_{mn}|^2}{(E_n - E_m)^2} \sin^2 \frac{\pi}{h}(E_n - E_m)t. \quad (12) \end{aligned}$$

Эту величину можно рассматривать как вероятность нахождения системы в момент времени t в состоянии m ; она пропорциональна $|V_{mn}|^2$, что и указывает на особую важность этих матричных элементов. Однако, согласно сказанному выше, во время действия возмущения мы не можем обнаружить систему в состоянии с энергией E_m , поскольку для этого нужно измерить энергию с неопределенностью, меньшей чем $E_m - E_n$, а время, в течение которого система остается в состоянии E_m , меньше $h/(E_m - E_n)$. Обнаружить систему в состоянии E_m возможно лишь в том случае, если в момент t возмущение $V(t)$ внезапно выключается, так что состояние E_m становится стационарным конечным состоянием, и вероятность такой возможности пропорциональна $|c_m(t)|^2$. Поскольку энергия системы не может быть измерена во время действия возмущения, в этот период к ней неприменим закон сохранения энергии, который должен выполняться лишь по окончании действия возмущения¹⁾.

¹⁾ В теории возмущений возникает ряд тонких вопросов относительно возмущающего потенциала V . Рассмотрим сначала случай системы с дискретным спектром. В этом случае потенциал V есть потенциал взаимодействий внутри системы (не зависящих от t) или внешний потенциал (который может зависеть от t). Если это потенциал внутренних взаимодействий, то взаимодействием нельзя приписать ни начала, ни конца, а в отсутствие взаимодействия измерение энергий $E_n^{(0)}, E_m^{(0)}, \dots$ оказывается невозможным. Если же V характеризует внешнее воздействие, то можно предположить, что это воздействие имеет начало и конец (например, соответственно приближению и удалению системы, создающей внешнее поле). При этом энергию можно измерить как до взаимодействия, так и после него. Вообще говоря, эти две энергии будут неодинаковы, но закон сохранения энергии можно оставить в силе, сказав, что система получила или отдала энергию внешней системе, которая создает поле.

Тогда естественно рассматривать полную систему Σ , составленную из исследуемой системы S и системы S' , создающей поле. Но для того, чтобы можно было применить закон сохранения энергии, необходимо иметь возможность сначала приблизить систему S' к системе S , а затем удалить, для чего требуется, чтобы система Σ обладала непрерывным спектром. Тогда нужно воспользоваться теорией, излагаемой на с. 153 и далее, которая показывает, каким образом выполняется закон сохранения энергии. В общем, во всех случаях, когда закон сохранения энергии может быть подтвержден экспериментально, по-видимому, верна теория, излагаемая на с. 153 и далее. — Л. Б.

Может оказаться, что некоторые из матричных элементов V_{mn} равны нулю. Это означает, что прямые переходы $n \rightarrow m$ невозможны. Но такие переходы иногда могут осуществляться косвенно через промежуточное состояние p , если только V_{mp} и V_{pn} не равны нулю. В более общем случае может иметься несколько состояний p, p', \dots , которые могут играть роль промежуточных в соответствии со схемой:

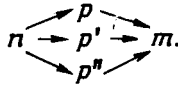


Рис. 7

В принятом выше приближении можно написать (что будет справедливым также для p, p', \dots):

$$\begin{aligned} \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{dc_m}{dt} &= \sum_p V_{mp} c_p \exp[(2\pi i/\hbar)(E_p - E_m)t], \\ \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{dc_p}{dt} &= V_{pn} \exp[(2\pi i/\hbar)(E_n - E_p)t]. \end{aligned} \quad (13)$$

Второе уравнение дает

$$c_p(t) = V_{pn} \frac{\exp[(2\pi i/\hbar)(E_n - E_p)t] - 1}{E_n - E_p}, \quad (14)$$

а из первого получим

$$\begin{aligned} \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{dc_m}{dt} &= \sum_p V_{mp} V_{pn} \times \\ &\times \frac{\exp[(2\pi i/\hbar)(E_n - E_m)t] - \exp[(2\pi i/\hbar)(E_p - E_m)t]}{E_n - E_p}, \end{aligned} \quad (15)$$

откуда после интегрирования с начальными условиями $c_m(0) = 0$ будем иметь

$$\begin{aligned} c_m(t) &= \sum_p \frac{V_{mp} V_{pn}}{E_n - E_p} \times \\ &\times \left\{ \frac{\exp[(2\pi i/\hbar)(E_n - E_m)t] - 1}{E_n - E_m} - \frac{\exp[(2\pi i/\hbar)(E_p - E_m)t] - 1}{E_p - E_m} \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Вводя обозначение

$$V'_{mn} = \sum_p \frac{V_{mp} V_{pn}}{E_n - E_p},$$

для вероятности найти систему в момент времени t в состоянии E_m получаем

выражение

$$|c_m(t)|^2 = \frac{2|V'_{mn}|^2}{(E_m - E_n)^2} [1 - \cos \frac{2\pi}{h} (E_n - E_m)t] +$$

+ члены, зависящие от $(E_p - E_n)$. (17)

Вообще говоря, члены, содержащие $E_p - E_n$, практически не фигурируют в приложениях этой формулы, играющей исключительно важную роль в теории взаимодействия излучения с веществом.

Здесь снова в течение промежутка времени, когда действует возмущение, невозможно ни обнаружить на опыте систему в состоянии E_p , ни применить закон сохранения энергии. В итоге систему в конечном состоянии с энергией E_m можно обнаружить лишь по окончании действия возмущения, причем вероятность этого события равна $|c_m(t)|^2$. Но даже в этом случае никогда нельзя обнаружить систему в одном из состояний p, p', \dots , а следовательно, закон сохранения энергии неприменим к этим промежуточным состояниям. Это ясно покажет нам излагаемая ниже теория, рассматривающая вероятности квантовых переходов.

Отметим, что с аналогичными обстоятельствами мы встречаемся в том случае, когда переход $n - m$ может происходить через последовательность нескольких промежуточных состояний.

6. ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРЕХОДОВ

Выше мы предполагали, что у нас дискретный ряд квантовых состояний. Но зачастую встречается очень важный случай, когда состояния образуют непрерывный спектр (например, в задачах рассеяния). Тогда нужно повторить проведенные рассуждения, предположив, что система, находящаяся в известном начальном состоянии n , может перейти в конечное состояние, принадлежащее непрерывному спектру. Будем считать, что число возможных конечных состояний, энергия которых лежит в интервале $(E, E + dE)$, равно $\rho(E)dE$, причем функция $\rho(E)$ непрерывна и не очень быстро меняется при изменении E .

Мы несколько изменим изложенную ранее теорию так, чтобы она была применима к случаю, когда конечное состояние m лежит в малом интервале ΔE непрерывного спектра. Сначала предположим, что возможен прямой переход $n - m$ ($V_{nm} \neq 0$). Тогда из формулы (12) следует, что полная вероятность перехода за время t из начального состояния n в какое-либо конечное состояние m , лежащее в интервале $(E, E + \Delta E)$, будет равна

$$P_{n, \Delta E}(t) = \frac{4\pi^2}{h^2} \int_E^{E + \Delta E} |V_{nm}|^2 \left(\frac{\sin \frac{\pi}{h} (E - E_n)t}{\frac{\pi}{h} (E - E_n)} \right)^2 \rho(E) dE. \quad (18)$$

Как нетрудно убедиться, если F_n не лежит в интервале ΔE , то данный интеграл будет очень мал в любой момент t , так что $P(t)/t$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Можно сказать, что в этом случае вероятность перехода за единицу времени равна нулю.

Иначе обстоит дело, если E_n лежит в интервале ΔE . В этом случае, если время t достаточно велико, то интеграл от E до $E + \Delta E$ растет пропорционально времени t и вероятность перехода за единицу времени принимает конечное значение. Такие переходы происходят достаточно часто.

Точнее говоря, исследование данного интеграла показывает, что для того, чтобы утверждать, что произошел переход из начального состояния E_n в состояние E , лежащее в интервале δE , необходимо прождать время, по порядку величины равное $\delta t = (h/2\pi)/\delta E$; это соответствует четвертому соотношению неопределенностей $\delta E \cdot \delta t \sim h$. Поэтому закон сохранения энергии $E_m \approx E_n$ будет выполняться лишь по истечении достаточно большого промежутка времени, но в нашем масштабе величина h очень мала, и это время на практике оказывается очень коротким.

Таким образом, по истечении времени δt (которое на практике очень мало) от начала возмущения будет выполняться закон сохранения энергии и становится возможным констатировать, что система перешла из начального состояния E_n в конечное состояние с почти такой же энергией E_m ($E_m - E_n \approx h/\delta t$). Поэтому очень приближенно можно написать

$$P_{n, \Delta E}(t) \approx \frac{4\pi^2}{h^2} |V_{mn}|^2 \rho(E_n) \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{h} (E - E_n)t}{\frac{\pi}{h} (E - E_n)} \right)^2 dE, \quad (19)$$

так как интеграл определяется в основном окрестностью точки $E = E_n$ и без большой ошибки можно вместо $\rho(E)$ поставить $\rho(E_n)$, а интеграл распространить на все значения E . Полагая

$$u = \frac{\pi}{h} (E - E_n)t,$$

получаем

$$\frac{P_{n, \Delta E}(t)}{t} = \frac{4\pi}{h} |V_{mn}|^2 \rho(E_n) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = \frac{4\pi^2}{h} |V_{mn}|^2 \rho(E_n). \quad (20)$$

Отнесенная к единице времени вероятность перехода из состояния n в состояние m , принадлежащее непрерывному спектру, в результате оказывается равной

$$P_{n-m} = \frac{4\pi^2}{h} |V_{mn}|^2 \rho(E_n). \quad (21)$$

Эта фундаментальная формула (формула Вентцеля) справедлива в том случае, когда возможен прямой переход $n \rightarrow m$. В этом случае V_{nm} — отличный от нуля матричный элемент V_{nm} , описывающий переход из состояния n в состояние m с энергией E_m , принадлежащее непрерывному спектру. Проведенный анализ ясно показывает, каким образом закон сохранения энергии строго входит в силу по истечении времени взаимодействия, соответствующего четвертому соотношению неопределенностей.

Если прямой переход $n \rightarrow m$ невозможен ($V_{nm} = 0$), то иногда возможен переход $n \rightarrow m$ через промежуточное состояние p , и тогда нужно исходить из формулы (17). Как нетрудно убедиться, если не рассматривать исключительный случай резонанса между состояниями m и p , члены с $E_p - E_m$ в формуле (17) не дают сколько-нибудь заметного вклада в вероятность перехода. Поэтому все сказанное выше будет по-прежнему справедливо, если заменить V'_{mn} на V_{mn} :

$$P_{n \rightarrow m} = \frac{4\pi^2}{h} |V'_{mn}|^2 \rho(E_n),$$

где

$$V'_{mn} = \sum_p \frac{V_{mp} V_{pn}}{E_n - E_p},$$

а m — индекс состояния в непрерывном спектре, соответствующего энергии E_n .

Закон сохранения энергии по-прежнему выполняется лишь для полного процесса $n \rightarrow m$, но не для промежуточного состояния p , поскольку E_p может отличаться от E_n и E_m .

И в данном случае тоже нельзя обнаружить систему в промежуточном состоянии p , так что нарушение закона сохранения энергии ненаблюдаемо. Подобного рода состояния p называются «виртуальными», поскольку они не могут быть обнаружены на опыте.

Для переходов с несколькими промежуточными состояниями можно вывести аналогичные, хотя и более сложные формулы.

Физический пример. Приведем пример, чтобы проиллюстрировать изложенное выше.

Рассмотрим сначала рассеяние света на атоме. У атома имеются основное квантовое состояние с минимальной энергией E_0 и ряд возбужденных квантовых состояний с энергиями E_1, E_2, \dots , превышающими E_0 . Если на атом падает световая волна с частотой ν , то он рассеивает падающий свет, не меняя его частоты. Анализ этого явления, позволяющий найти закон «дисперсии» для атомов рассматриваемого вида, приводит к представлению о том, что, взаимодействуя с излучением, атом колеблется между состоянием E_0 и «виртуальными» состояниями E_1, \dots . Точнее, происходит переход с сохранением энергии из начального состояния *падающий фотон с частотой ν + атом в*

состоянии E_0 в конечное состояние рассеянный фотон с частотой ν , направление движения которого в общем случае отлично от направления падения, + атом, вернувшийся в состояние E_0 , через промежуточное состояние, которым является одно из состояний E_1, E_2, \dots в соответствии с рассмотренной выше теоретической схемой. Поскольку, если не считать исключительного случая резонанса, требующего специального изучения, разности энергий $E_i - E_0$ отличны от $h\nu$, закон сохранения энергии в промежуточном состоянии E_i не выполняется. Но это не очень существенно, так как указанное промежуточное состояние является «виртуальным» и его невозможно обнаружить на опыте.

В квантовой теории взаимодействия между заряженными частицами также приходится часто иметь дело с переходами через промежуточные «виртуальные» состояния с нарушением закона сохранения энергии (обмен виртуальными фотонами).

Хорошую иллюстрацию к четвертому соотношению неопределенностей дает теория ширины спектральных линий. Рассмотрим спектральную линию, соответствующую переходу атома из возбужденного состояния E_i в основное состояние E_0 . Как показывают опыт и квантовая теория, ширина такой линии испускания конечна и распределение интенсивности (контур линии) дается формулой

$$I(\nu) = \frac{I_0\gamma}{4\pi^2(\nu_{i0} - \nu)^2 + \gamma^2/4}, \quad (22)$$

где $\nu_{i0} = (E_i - E_0)/h$ — (центральная) частота линии, а γ — «время жизни» начального состояния с энергией E_i (вероятность нахождения атома в возбужденном состоянии E_i после возбуждения убывает со временем t по закону $e^{-\gamma t}$). Как нетрудно видеть, $I(\nu)$ достигает максимума при $\nu = \nu_{i0}$ и быстро убывает при удалении от центра линии: $I(\nu) = \frac{1}{2}I(\nu_{i0})$ при $|\nu - \nu_{i0}| = \gamma/4\pi$. Таким образом, можно условно принять величину $\gamma/4\pi$ в качестве «ширины» линии. Учитывая определение времени жизни γ , мы видим, что за атомом в состоянии E_i можно следить лишь в течение времени δt , по порядку величины равного $1/\gamma$. Поэтому невозможно измерить E_i с неопределенностью, меньшей $\delta E \sim h/\delta t \sim h\gamma$. Таким образом, частоту линии можно измерить лишь с неопределенностью $\delta\nu = \delta E/h \sim \gamma$, что соответствует конечной ширине линии.

Читателей, желающих глубже изучить затронутые в данном разделе вопросы, отсылаем к книге «Новая теория света», т. II [II, 16].

7. СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ И ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В той области, где должны учитываться релятивистские поправки (при скоростях, близких к c), можно найти новые формы соотношения неопреде-

ленностей, отмеченные Ландау и Пайерлсом [18] и вызвавшие многочисленные дискуссии.

При определении энергии E в релятивистской области должна учитываться внутренняя энергия, связанная с массой. Так, для частицы с собственной массой m_0 следует положить

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Если p_x — одна из составляющих импульса, то из уравнения Гамильтона $\partial E/\partial p_x = v_x$ следует соотношение

$$\delta E = v_x \delta p_x, \quad (23)$$

в справедливости которого нетрудно убедиться, положив

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad p_x = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Исходя из состояния с известными энергией E_0 и импульсом p_0 , будем измерять величину E в течение времени δt . Неопределенность энергии будет равна $\delta E \geq h/\delta t$. Но $\delta E = v_x \delta p_x$, а v_x не может быть больше c . Следовательно,

$$\delta p_x \geq h/(c \delta t), \quad (24)$$

т.е. мы получили соотношение неопределенностей нового вида, связывающее неопределенность импульса Лагранжа с длительностью измерения независимо от неопределенности соответствующей координаты x . Таким образом, согласно теории относительности, измерение импульса всегда требует некоторого времени, если мы хотим в результате измерения получить достаточно точное значение.

Новое соотношение можно также вывести путем следующих рассуждений. Предположим, что в результате некоего измерения установлено, что частица находится в малой окрестности точки O . После такого измерения мы имеем волновой пакет ψ бесконечно малой протяженности, а, как мы видели, анализ Фурье показывает, что такой волновой пакет содержит составляющие со всеми возможными частотами. Из релятивистской формулы

$$h\nu = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

следует, что бесконечно большие частоты соответствуют скоростям, бесконечно близким к c . Поэтому, если измерение производится в течение времени δt , то в конце измерения фронт волны ψ может находиться на расстоянии $c \delta t$ от точки O и $\delta x = c \delta t$. Тогда из соотношения Гейзенберга $\delta p_x \cdot \delta x \geq h$ сле-

дует, что $\delta p_x \geq h/(c\delta t)$, и мы снова получаем новое соотношение неопределенностей¹⁾.

В релятивистской теории энергия E и импульс p связаны соотношением $E^2/c^2 = p^2 + m_0^2 c^2$, откуда $E dE = c^2 p dp$. Поскольку $p = Ev/c^2$, мы имеем $\delta E = v \delta p$, что дает возможность записать соотношение неопределенностей

$$\delta E = v \delta p \geq v h / \delta q, \text{ т.е. } \delta E \cdot \delta q \geq v h, \quad (25)$$

связывающее неопределенность энергии с неопределенностью положения. В качестве примера для данного случая рассмотрим опыты фон Траубенберга, которые теоретически проанализировал Шредингер [19].

Представим себе атомы, возбужденные до уровня с энергией E_i и движущиеся с постоянной скоростью v вдоль оси Ox , в каждой точке которой задано неоднородное магнитное поле $H(x)$. Величина E_i изменяется с изменением координаты x соответственно изменению поля H . Переходя в основное состояние с энергией E_0 , атомы испускают фотоны с частотой, зависящей от поло-

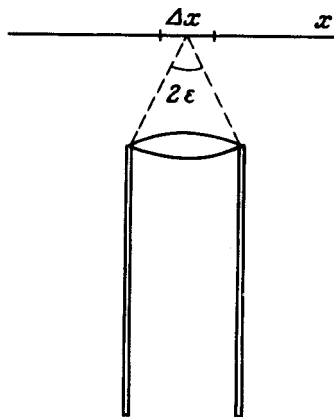


Рис. 8

¹⁾ Поскольку $\delta t \geq h/\delta E$, а также $\delta E < E$, имеем $\delta t \geq h/E$. Учитывая, что в релятивистской теории фронт волны может распространяться со скоростью c , мы должны положить $\delta q = c \delta t$, откуда

$$\delta q \geq \frac{hc}{E} = \frac{h}{m_0 c} \sqrt{1 - \beta^2},$$

т.е. $\delta q \geq \lambda \beta$, поскольку

$$\lambda = \frac{h}{m_0 \beta c} \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Для света $\delta q \geq \lambda$, но для частиц с конечной массой покоя величина δq может быть меньше λ . — Л. Б.

жения, занимаемого атомом в момент перехода. Мы хотим установить, как изменяется E_i , наблюдая частоту спектральных линий, испускаемых на каждом элементе оси Ox . К сожалению, как отметил Шредингер, здесь приходится сталкиваться со следующими обстоятельствами.

Во-первых, две точки на оси Ox «различимы» только в том случае, если расстояние δx между ними больше $\lambda(x)/\sin \varepsilon$, где $\lambda(x)$ — длина волны света, испускаемого в точке x , а ε — половина угловой апертуры прибора наблюдения. Во-вторых, за время наблюдения δt испускающий атом приближается к прибору наблюдателя со скоростью, которая может достигать $v \sin \varepsilon$, а потому вследствие эффекта Доплера возникнет неопределенность в длине волны $\delta \lambda = (v/c)\sin \varepsilon \lambda$. Следовательно, $\delta \nu = (v/c)\sin \varepsilon \nu$, поскольку $|\delta \lambda / \lambda| = |\delta \nu / \nu|$, а так как $\delta x = \lambda / \sin \varepsilon$, получим

$$\delta E = h\nu(\sin \varepsilon / \lambda) \geq h\nu / \delta x, \quad \delta E \cdot \delta x \geq h\nu. \quad (26)$$

В результате мы снова приходим к выведенному ранее соотношению неопределенностей.

Запишем его еще раз в виде

$$\delta x \geq h / \delta p_x = h\nu / \delta E.$$

Чтобы можно было определить с точностью δx координату частицы, энергия которой четко определена ($\delta E \ll E$), должно выполняться условие $\delta x \gg h\nu/E = v/\nu$, поскольку $E = h\nu$. Но $\lambda = V/\nu = c^2/\nu v$, а потому $\delta x \gg \beta^2 \lambda$.

В ньютоновском приближении (малых скоростей частицы) величиной β^2 можно пренебречь и данное неравенство нас не ограничивает. Оно позволяет нам установить, что частица находится в области, размеры которой малы по сравнению с длиной волны. Но при $v \rightarrow c$ это невозможно, так как тогда $\beta \rightarrow 1$ и неравенство принимает вид $\delta x \gg \lambda$. Путем измерений становится более невозможным определить, что частица находится в области порядка длины волны. Поэтому для частиц со скоростями, близкими к c , и, в частности, для фотона определение положения в масштабах длины волны становится невозможным.

Рассмотренные вопросы вызвали многочисленные дискуссии. Они связаны с вопросом о состояниях с отрицательной энергией, хорошо известных из теории Дирака и из общей теории частиц со спином, а также об отсутствии положительно определенной плотности вероятности для фотонов и частиц с четным спином. Эти дискуссии не привели к вполне определенным выводам, и вопрос требует дальнейшего изучения.

Другие соображения о связи соотношений неопределенностей с релятивистскими понятиями были высказаны различными авторами, в частности Шредингером [20]. Мы здесь напомним лишь некоторые моменты, относящиеся к измерению времени и расстояния, причем проведем рассуждения в более краткой, чем у Шредингера, форме. Предположим, что в галилеевой системе отсчета, в которой проведена синхронизация часов, мы хотим выверить часы, имеющие собственную массу M_0 . Допустим, что проверка производится по испусканию часами фотона, регистрируемого в момент времени t наблюдателем, находящимся на расстоянии l от часов. Тогда время испускания фотона

будет равно $t - l/c$, что и дает возможность выверить часы. Но чтобы часы при испускании фотона не приобрели импульс отдачи, мешающий измерению, энергия испускаемого фотона должна быть очень малой по сравнению с собственной энергией часов, т.е. $h\nu \ll M_0c^2$. Но продолжительность δt испускания волнового пакета, сопоставляемого с фотоном, будет больше или равна $h/h\delta\nu$, где $\delta\nu$ — неопределенность в значении ν , намного меньшая самой величины ν . Отсюда $\delta t \gg 1/\nu \gg h/M_0c^2$. Поскольку же время прибытия фотона может быть зарегистрировано наблюдателем в любой момент из временного интервала δt , в течение которого волновой пакет проходит мимо наблюдателя, то свертка часов может производиться лишь с погрешностью, превышающей $\tau_0 = h/M_0c^2$.

Точно так же если мы хотим измерить в галилеевой системе отсчета длину линейки, то в силу соотношения $\delta x \geq h/\delta p_x$ это измерение может быть проведено лишь с неопределенностью

$$\delta x \geq \frac{h}{(E_0/c^2)\delta v_x},$$

поскольку

$$p_x = \frac{M_0 v_x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \geq \frac{E_0}{c^2} v_x, \quad \delta p_x \geq \frac{E_0}{c^2} \delta v_x.$$

Учитывая, что $\delta v_x \leq c$, имеем $\delta x \geq h/(E_0/c) = h/M_0c$. Таким образом, длина линейки никогда не может быть известна с неопределенностью, меньшей чем

$$\lambda_0 = h/M_0c,$$

где M_0 — масса линейки.

За подробностями отсылаем читателя к работе Шредингера [20], все рассуждения которого в конечном итоге могут быть сведены к четвертому соотношению неопределенностей и к приведенным выше соотношениям. Но в ней можно найти его очень глубокие замечания о роли времени в волновой механике.

8. ФОРМУЛЫ МАНДЕЛЬШТАМА И ТАММА

Основываясь на соображениях, носящих отчасти дискуссионный характер, Мандельштам и Тамм [21] вывели интересные формулы, относящиеся к четвертому соотношению неопределенностей. Рассмотрим их.

Названные авторы отмечают, что если система находится в стационарном состоянии $\psi \sim e^{2\pi i \nu t}$, то распределения вероятностей для всех динамических переменных не будут зависеть от времени, в чем нетрудно убедиться. Отсюда они делают вывод, что должно существовать общее соотношение между дисперсией σ_E энергии и вариациями во времени координат, импульсов и т.д.

Чтобы показать это, напомним соотношение

$$\sigma_A \cdot \sigma_B \geq \frac{1}{2} |\overline{AB} - \overline{BA}|, \quad (27)$$

справедливое для любой пары наблюдаемых величин A и B . По определению мы имеем

$$\overline{A} = \int \psi^* A \psi d\tau,$$

откуда следует (в предположении, что A не зависит от времени) соотношение

$$\frac{d\overline{A}}{dt} = \frac{2\pi i}{h} \int \psi^* (AH - HA) \psi d\tau = \frac{2\pi i}{h} (AH - HA) = \frac{2\pi i}{h} [A, H], \quad (28)$$

где H — гамильтониан системы. Положив в формуле (27) $B = H$, получим

$$\sigma_H \cdot \sigma_A \geq \frac{h}{4\pi} \left| \frac{d\overline{A}}{dt} \right|, \quad (29)$$

где $\sigma_H = \sigma_E$ — дисперсия энергии. Формула (29) и есть соотношение Мандельштама — Тамма. В случае стационарного состояния с известной энергетической дисперсией $\sigma_H = 0$ и $d\overline{A}/dt = 0$.

Полученное соотношение можно записать в другой форме. Для изолированной системы величина σ_H — постоянная, а σ_A может меняться. Рассмотрим интервал времени δt и обозначим через $\overline{\sigma_A^{\delta t}}$ усредненное по этому интервалу времени значение σ_A (средние такого рода отличаются от того, что до сих пор обозначалось черточкой). Интегрируя по интервалу времени δt и замечая, что интеграл от абсолютной величины функции всегда больше или равен абсолютной величине интеграла от функции, получаем

$$\sigma_H \cdot \delta t \geq \frac{h}{4\pi} \frac{\overline{A(t + \delta t)} - \overline{A(t)}}{\overline{\sigma_A^{\delta t}}}. \quad (30)$$

В связи с этим Мандельштам и Тамм ввели «стандартное время» δT_A — наименьшее время, в течение которого среднее значение величины A меняется на $\overline{\sigma_A}$. Тогда формулу (30) можно переписать в виде

$$\sigma_H \cdot \delta T_A \geq h/4\pi. \quad (31)$$

Из формулы (29) следует, что, для того чтобы среднее значение величины A могло изменяться с течением времени, не только величина σ_H должна быть отлична от нуля, но и величина σ_A не должна быть тождественно равна нулю. В случае когда A обладает дискретным спектром, последнее очевидно; но это не очевидно, если у оператора A непрерывный спектр. Из формулы (30) можно также видеть, что если в некоторый момент времени величина σ_A обращается в нуль, а величина \overline{A} не перестает изменяться, то в начальный момент

времени, т.е. при очень малых δt , величина σ_A должна изменяться намного быстрее величины \bar{A} .

Интересной иллюстрацией к предыдущим формулам может служить случай распространения волнового пакета вдоль оси x при условии $A = x$. В этом случае x есть x -координата центра тяжести волнового пакета, величину σ_A можно рассматривать как его среднюю протяженность, а δT_A — как среднюю продолжительность его прохождения мимо данной точки. Соотношение $\sigma_H \times \delta T_A \geq h/4\pi$ показывает, что эта средняя продолжительность будет тем больше, чем меньше σ_H . В результате мы снова приходим к хорошо известному выводу, но если ранее наши рассуждения приводили к такому выводу лишь в отсутствие внешнего поля, то здесь он справедлив и в случае взаимодействия с внешним полем. Это явствует из того, что в рассуждениях, приводящих к формулам (27)—(30), нигде не делается предположения об отсутствии внешнего поля.

Приведем еще один пример, заимствованный у Мандельштама и Тамма. Пусть φ_n — волновая функция, характеризующая некоторое состояние системы, для которого дисперсия энергии равна σ_H ¹⁾. Обозначив через ψ какое-либо состояние системы, рассмотрим оператор L_n , для которого

$$L_n \psi = c_n \varphi_n, \quad c_n = \int \varphi_n^* \psi dt.$$

Оператор L_n выделяет из ψ составляющую $c_n \varphi_n$; это — проектор, причем, очевидно, $L_n^2 = L_n$. Поскольку

$$\sigma_{L_n} = \sqrt{\overline{L_n^2} - (\bar{L}_n)^2} = \sqrt{\overline{L_n} - (\bar{L}_n)^2}, \quad (32)$$

из неравенства Мандельштама—Тамма следует соотношение

$$\sigma_H \sqrt{\overline{L_n} - (\bar{L}_n)^2} \geq \frac{h}{4\pi} |d\bar{L}_n/dt|. \quad (33)$$

Оно содержит лишь \bar{L}_n , и его легко проинтегрировать. Предположим, что в начальном состоянии $\bar{L}_n(0) = 1$, т.е. вначале система с полной определенностью находилась в состоянии φ_n . Интегрируя от 0 до t , получаем

$$\frac{2\pi}{h} \sigma_H t \geq \frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\overline{L_n}(t)}. \quad (34)$$

Если $0 < t < h/(4\sigma_H)$, то

$$\overline{L_n}(t) \geq \cos^2 \left(\frac{2h}{h} \sigma_H t \right).$$

¹⁾ Функция φ_n может быть собственным значением оператора A , не коммутирующего с H . — Л. Б.

Если $t > h/(4\sigma_H)$, то соотношение (34) не накладывает никаких ограничений на значение $\overline{L_n(t)}$, которое всегда содержится в замкнутом интервале $[0, 1]$.

Обозначим через τ среднее время жизни системы в состоянии φ_n , так что $\overline{L_n(\tau)} = 1/2$, если $\overline{L_n(0)} = 1$. Тогда из последнего неравенства получаем ограничение

$$\sigma_H \cdot \tau \geq h/8, \quad (35)$$

несколько более жесткое, нежели соотношение $\sigma_H \cdot \tau \geq h/4\pi$.

Работа Мандельштама и Тамма содержит также несколько менее ясное применение рассмотренных формул к случаю возмущений, на чем мы здесь не останавливаемся.

Глава X

Некоторые трудные вопросы волновой механики

1. РЕДУКЦИЯ ПАКЕТА ВЕРОЯТНОСТЕЙ В РЕЗУЛЬТАТЕ ИЗМЕРЕНИЯ

В физической интерпретации волновой механики измерение играет принципиально важную роль. Именно оно, давая нам новую информацию, изменяет состояние наших знаний о системе или об изучаемой частице и резко меняет форму волновой функции ψ , представляющей наши знания. Например, если данные измерения более или менее точно указывают нам положение частицы, то волновой пакет, который представляла собой функция ψ до измерения, «редуцируется» в менее протяженный волновой пакет, который может быть даже почти точечным, если измерение является очень точным. С этим и связан предложенный Гейзенбергом термин «редукция пакета вероятностей», характеризующий такого рода резкое изменение формы ψ . Если же при измерении определяются составляющие импульса, то скачкообразная редукция волнового пакета происходит не в координатном, а в импульсном пространстве.

Редукция волнового пакета приводит к новому состоянию, которое нельзя было предвидеть заранее, поскольку до измерения можно вычислять лишь вероятности различных возможных вариантов. В этом и состоит индетерминизм новой механики.

[Фон Нейман показал, что такой индетерминизм носит принципиальный характер, ибо введение вероятностей нельзя свести к нашему незнанию точных значений некоторых скрытых параметров¹⁾.]

Если измерение дает нам максимум сведений, допускаемых теорией некоммутирующих переменных (о максимальных измерениях говорится на с. 100), то мы сможем сконструировать волновую функцию ψ , характеризующую наши знания после измерения, и следить за ее эволюцией во времени при помо-

¹⁾ Фраза в скобках позднее де Бройлем была зачеркнута, так как он убедился в ошибочности рассуждений фон Неймана, о чем речь пойдет во второй части настоящей монографии. В последующих работах де Бройль развил теорию скрытых параметров, примером которой является его теория двойного решения, где наряду с вероятностной волной ψ фигурирует другая волна ν , для которой не имеет места редукция волнового пакета. Сама возможность такой теории показывает ошибочность теоремы фон Неймана. Следовательно, наличием неопределенностей в результатах измерений не исключается возможность скрытой детерминированности. — Ж. Л.

щи волнового уравнения до тех пор, пока новое измерение не изменит состояния наших знаний и не приведет к скачкообразному изменению формы волны ψ . Эволюция волны ψ между двумя измерениями, описываемая волновым уравнением, полностью определяется начальным значением функции ψ , поскольку волновое уравнение представляет собой уравнение первого порядка относительно t . Поэтому мы имеем детерминированную эволюцию вероятностей между двумя измерениями, но недетерминированную последовательность наблюдаемых явлений.

2. НЕВОЗМОЖНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОСТОЯНИЯ, ПРЕДШЕСТВОВАВШЕГО ИЗМЕРЕНИЮ, ПО СОСТОЯНИЮ ПОСЛЕ ИЗМЕРЕНИЯ. РАЗМЫВАНИЕ ФАЗ В РЕЗУЛЬТАТЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Как только мы провели измерение, становится известной волновая функция ψ_1 , описывающая состояние наших знаний после измерения. Можно ли определить по этой волновой функции ту, которая существовала до измерения? На первый взгляд может показаться, что это возможно, если, например, волновую функцию после измерения принять за начальное выражение для ψ и проследить ее эволюцию *в прошлое* при помощи волнового уравнения, в котором знак времени изменен на противоположный.

Однако этот вопрос требует более тщательного рассмотрения.

Предположим, что мы имеем дело с одной частицей (или одной системой частиц). Пусть $\psi_0 = \sum_k c_k \varphi_k$ — начальная волновая функция частицы до измерения, соответствующая тому, что нам известно в данный момент, и разложенная в ряд по собственным функциям φ_k наблюдаемой A , которую мы собираемся измерить. При точном измерении величины A мы получаем одно из собственных значений a_l , вероятность появления которого в процессе измерения составляет $|c_l|^2$. После измерения волновая функция примет вид $\psi_1 = \varphi_l$. Значение ψ_1 ничего не говорит нам о значениях коэффициентов c_k до измерения и даже не дает никакой информации о коэффициенте c_l , соответствующем a_l ¹⁾. Поэтому мы не можем определить ψ_0 по известной волновой функции ψ_1 .

Положение несколько облегчается в случае очень большого числа N частиц (или систем частиц) с начальной волновой функцией ψ_0 . Тогда измерение наблюдаемой A для N систем с очень большой степенью точности даст $N|c_l|^2$ раз значение a_l , $N|c_2|^2$ раз — значение a_2 и т. д. В результате мы узнаем значения величин $|c_k|^2$, но это не эквивалентно знанию самого коэффициента

$$c_k = |c_k| \exp(i\delta_k),$$

поскольку «фазы» δ_k остаются неизвестными. Отсюда следует, что остаются неизвестными разности фаз между составляющими $c_k \varphi_k$ функции ψ_0 . Но эти

¹⁾ Нам известно лишь, что $c_l \neq 0$. — Л. Б.

разности, как мы вскоре увидим, играют принципиально важную роль. Таким образом, даже путем *статистических* измерений невозможно восстановить по ψ_1 функцию ψ_0 .

Для большей конкретности рассмотрим пример измерения импульса и координаты, ограничиваясь случаем одномерного движения свободной частицы.

Если наблюдаемая A — это импульс p , то

$$\psi_0 = \sum_k c_k \exp[-(2\pi i/h)p_k x]$$

и измерение дает значение $p = p_1$, вероятность которого до измерения по предположению была равна $|c_1|^2$. После измерения волновая функция примет вид

$$\psi_1 = \exp[-(2\pi i/h)p_1 x],$$

и мы не имеем никакой возможности определить ψ_0 по известной функции ψ_1 . Статистические измерения на очень большом числе частиц, имеющих в качестве начальной одну и ту же волновую функцию ψ_0 , дадут нам величину $|c_k|^2$, но не дадут никаких сведений об относительных фазах составляющих функции ψ_0 .

Перейдем к случаю измерения координаты, когда наблюдаемая $A = x$. Измерение величины x даст некоторое значение x_1 , вероятность появления которого до измерения была равна $|\psi_0(x_1)|^2$. После измерения волновая функция примет вид $\psi_1 = \delta(x - x_1)$, который ничего не говорит нам о функции ψ_0 . Единственное, что мы знаем, это то, что функция $\psi_0(x_1)$ была отлична от нуля. Статистические измерения на очень большом числе частиц с одинаковыми начальными волновыми функциями ψ_0 дадут нам величину $|\psi_0(x)|^2$ в каждой точке x , но они ничего не скажут об относительных фазах функции ψ_0 в различных точках. Например, если мы найдем, что $|\psi(x)|$ везде имеет одно и то же значение A_1 , то ψ_0 может быть плоской монохроматической волной с амплитудой A , имеющей произвольную длину волны и произвольное направление распространения; ψ_0 может даже иметь вид $\psi_0 = A \exp[i\delta(x)]$, где $\delta(x)$ — произвольная функция.

Итак, всякое измерение приводит к полному размыванию фаз (Бор)¹⁾. Данное обстоятельство послужило для Дирака исходным пунктом в его первой работе по теории вторичного квантования, и подобный способ введения вто-

¹⁾ Для лучшего понимания эволюции идей де Бройля по данному вопросу весьма рекомендуем его книгу «Теория измерений в волновой механике» [II, 27]. В ней он показывает, что в конечном итоге *любое* измерение можно свести к измерению положения. Такое сведение означает, что первоначальная волна предварительно разлагается на волновые пакеты, *разделенные* в пространстве, и сам факт регистрации того, что частица присутствует в одном из пакетов, дает возможность однозначно приписать некоторое значение величине, которую предполагалось измерить. Именно разложение начального волнового пакета на разделенные волновые пакеты и привязывание частицы к одному из них оказывается причиной нарушения соотношения между фазами. — Ж. Л.

ричного квантования остается наиболее логичным с физической точки зрения.

Вследствие размывания фаз при измерении измерение вносит разрыв в эволюцию функции ψ , который неустраним как при движении от прошлого к будущему, так и при движении от будущего к прошлому.

Разности фаз между составляющими φ_k волновой функции имеют принципиально важное значение. Любые сведения о функции ψ , не содержащие сведений о фазах, являются радикально неполными. Важное значение фаз в волновой механике в полной мере обнаруживается при изучении столь важного вопроса, как интерференция вероятностей.

3. ВОЗМОЖНОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРОШЛОГО ПО ДАННЫМ ИЗМЕРЕНИЯ В МОМЕНТ t (ПОСТВИДЕНИЕ)

Как мы видели, наблюдатель, знающий результат некоторого измерения, проведенного над некой системой в момент времени t , не может восстановить волновую функцию, которой описывал состояние системы до измерения наблюдатель, располагавший предыдущей информацией.

Предположим, например, что наблюдатель A определяет положение частицы в момент t_1 и находит ее в точке M_1 . Тогда он, взяв в качестве начального значения волновой функции функцию

$$\psi_A(M, t_1) = \delta(M - M_1),$$

может, основываясь на волновом уравнении, найти вид волновой функции $\psi_A(M, t)$ в последующий момент времени и определить вероятность $|\psi_A(M, t_2)|^2$ нахождения частицы в точке M в какой-либо момент $t_2 > t_1$. Предположим, что измерение координат, проведенное в момент t_2 , показывает, что частица находится в точке M_2 . Наблюдатель, знающий лишь второе положение (и не знающий первого), никак не сможет восстановить вид волновой функции $\psi_A(M, t)$, взятой наблюдателем, который знал результат первого измерения. Если бы он знал эту функцию, то смог бы, обратив направление течения времени, получить положение M_1 в момент времени t_1 , но, не зная ее, он этого сделать не может. Даже если путем статистического эксперимента он определит амплитуды $|\psi_A(M, t_2)|$ во всех точках M пространства, он не будет знать соответствующие фазы и не сможет проследить «попятную» эволюцию волновой функции ψ_A . То же самое было бы и в случае измерения импульсов, т. е. при определении положения соответствующей точки в импульсном пространстве.

И все же, если наблюдатель B , знающий лишь второе положение, не может с *полной определенностью* установить первое [найдя вид функции $\psi_A(M, t)$], то он может определить относительные вероятности различных положений в момент времени t_1 по известному ему положению M_2 частицы в момент времени t_2 . Для этого он рассмотрит волновую функцию $\psi_B(M, t)$, которая эволюционирует согласно волновому уравнению с *обращенным направ-*

лением течения времени, имея начальный вид

$$\psi_B(M, t_2) = \delta(M - M_2).$$

Тогда для момента $t_1 < t_2$ прошедшего времени он найдет вид $\psi_B(M, t_1)$ волновой функции ψ_B , а величина $|\psi_B(M, t_1)|^2$ даст ему вероятность того, что в момент времени t_1 частица была в точке M_1 . Это — вероятность для наблюдателя B , который знает, что частица была в точке M_2 в момент времени t_2 , но не знает, что в момент t_1 она была в точке M_1 . Чтобы не было противоречий, величина $|\psi_B(M_1, t_1)|^2$ должна быть отлична от нуля (иначе мы имели бы нулевую вероятность для события, которое уже произошло). Более тщательный анализ показывает, что требуется нечто большее: вероятность $|\psi_A(M_2, t_2)|^2$ того, что частица будет в точке M_2 , если известно, что она была в точке M_1 в момент t_1 , должна быть равна вероятности $|\psi_B(M_1, t_1)|^2$ того, что частица была в точке M_1 в момент t_1 , если известно, что она была в точке M_2 в момент t_2 , т. е. при принятой ранее форме функций ψ_A и ψ_B должно выполняться равенство $|\psi_A(M_2, t_2)|^2 = |\psi_B(M_1, t_1)|^2$.

Это условие прямо связано со свойством симметрии функций Грина. Его физический смысл можно установить следующим образом. Поместим в точке M_1 непосредственно перед входом какого-либо оптического прибора R (при помощи которого можно наблюдать интерференцию или дифракцию) источник света с единичной интенсивностью. В точке M_2 на выходе нашего интерференционного прибора интенсивность света будет равна i . Если теперь мы поместим источник света с интенсивностью 1 в точку M_2 , то в точке M_1 получим интенсивность i . Это необходимо с термодинамической точки зрения, ибо если, предположим, вся установка находится в термостате с температурой T , а в точках M_1 и M_2 расположены два малых, почти точечных, источника теплового излучения абсолютно черного тела, то каждый из них должен посылать другому столько же энергии, сколько он получает, так как иначе равенство температур двух абсолютно черных тел самопроизвольно нарушится, а это невозможно.

Таким образом, наблюдатель B , пользуясь волновой функцией ψ_B , может, зная, что частица находилась в момент t_2 в точке M_2 , находить вероятности ее положений в предыдущий момент времени t_1 . Это задача, аналогичная классической задаче теории вероятностей, относящейся к вероятности причин.

В некотором смысле можно считать «истинной» волновой функцией в интервале (t_1, t_2) функцию ψ_A , поскольку она учитывает точные сведения о положении M_1 , которые могут иметься в момент $t > t_1$ (данное утверждение потребовало бы некоторых уточнений с релятивистской точки зрения при учете конечной скорости распространения света, но мы здесь на этом не будем останавливаться¹⁾).

¹⁾ Если первое положение характеризуется точкой-событием (M_1, t_1) в пространстве-времени, то второе будет характеризоваться точкой-событием (M_2, t_2) , которая должна лежать в области «будущего» светового конуса с началом в первой точке-событии. Поэтому наблюдатель B , который регистрирует положение M_2 в момент t_2 , может узнать о положении M_1 (скажем, по световому сигналу). Если же он о нем не знает, то в этом и есть неполнота его информации. — Л. Б.

Если бы наблюдатель B знал функцию ψ_A , то он мог бы точно определить первое положение, проследив за эволюцией функции ψ_A в обратном направлении. Но так как по предположению он знает лишь, что частица была в момент t_2 в точке M_2 , его «информация» неполна, ибо он не знает всего того, что мог бы знать в момент t_2 . Эта неполнота имеющейся у него информации приводит к необходимости использовать «неполную» функцию ψ_B , которая позволяет ему получить лишь вероятности положений в предшествующий момент t_1 , но не точное положение.

Напомним, что все сказанное в равной мере относится и к измерению импульса, т. е. к определению положения соответствующей точки в импульсном пространстве.

4. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Рассмотрим две наблюдаемые A и B (которые мы будем считать некоммутирующими). Пусть собственные значения и собственные функции первого из соответствующих операторов равны α_i и φ_i , а второго — β_j и χ_j . Из некоммутативности операторов A и B следует, что системы функций φ_i и χ_j не могут быть одинаковыми. Предположим, что начальное состояние системы характеризуется волновой функцией $\psi = \sum_i c_i \varphi_i$. Поскольку функции χ образуют полную систему, то φ_i можно разложить по функциям χ_k , получив выражение вида

$$\varphi_i = \sum_k s_{ik} \chi_k, \quad (1)$$

где s_{ik} — элементы некой унитарной матрицы S . Таким образом, имеем

$$\psi = \sum_i c_i \varphi_i = \sum_{i,k} c_i s_{ik} \chi_k. \quad (2)$$

Если для системы, находящейся в состоянии ψ , измеряется наблюдаемая A , то измерения дадут одно из собственных значений α_i с вероятностью $|c_i|^2$. После измерения наблюдаемой A система окажется в состоянии φ_i , и в этом состоянии измерения наблюдаемой B дадут собственное значение β_k с вероятностью $|s_{ik}|^2$. Таким образом, если сначала измеряется наблюдаемая A , а затем наблюдаемая B , то полная вероятность получить для B собственное значение β_k равна

$$\sum_i |c_i|^2 |s_{ik}|^2.$$

Предположим теперь, что мы измерили наблюдаемую B непосредственно в начальном состоянии ψ . Тогда, разложив ψ по собственным функциям χ_k , в силу общих принципов волновой механики мы получим, что вероятность получить для наблюдаемой B собственное значение β_k равна $|\sum_i c_i s_{ik}|^2$. Эта величина существенно отличается от предыдущей, поскольку она зависит от фаз коэффициентов c_i и s_{ik} , от которых предыдущая величина независима.

Поясним сказанное простым примером. Рассмотрим одномерную область изменения переменной x протяженностью L . В этой области нормированные на L собственные функции наблюдаемой импульса $p = A$ равны

$$\varphi_i = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} p_i x\right).$$

Пусть волновая функция частицы в начальном состоянии имеет вид

$$\psi = \sum_i \frac{c_i}{\sqrt{L}} \exp\left[\frac{2\pi i}{h} (W_i t - p_i x)\right].$$

Если сначала измерить импульс p , а затем координату x , то вероятность получить значение координаты $x = x_0$ будет равна

$$\sum_i |c_i|^2 \left| \frac{1}{\sqrt{L}} \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} p_i x_0\right) \right|^2 = \frac{1}{L},$$

поскольку $\sum_i |c_i|^2 = 1$. Таким образом, все положения в области L равновероятны. Если же величину x измерить непосредственно в начальном состоянии, то вероятность значения $x = x_0$ будет равна

$$\left| \sum_i \frac{c_i}{\sqrt{L}} \exp\left[\frac{2\pi i}{h} (W_i t - p_i x_0)\right] \right|^2,$$

т. е. будет представлять собой результат *интерференции* плоских волн, составляющих функцию ψ . В частности, если начальная функция ψ есть стоячая волна, равная сумме двух волн с одинаковыми частотой и амплитудой, но бегущих по оси x в противоположных направлениях, т. е.

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2L}} \left\{ \exp\left[\frac{2\pi i}{h} (Wt - px) + i\delta_1\right] + \exp\left[\frac{2\pi i}{h} (Wt + px) + i\delta_2\right] \right\},$$

то вероятность получить в этом начальном состоянии значение $x = x_0$ равна

$$\begin{aligned} |\psi|^2 &= \frac{1}{2L} \left| \exp\left[\frac{2\pi i}{h} px + \delta_2\right] + \exp\left[-\frac{2\pi i}{h} px + \delta_1\right] \right|^2 = \\ &= \frac{1}{L} \left[1 + \cos\left(\frac{4\pi}{h} px + \delta_2 - \delta_1\right) \right]. \quad (3) \end{aligned}$$

Это — тоже стоячая волна. Мы видим, что результат интерференции вероятностей существенно зависит от фаз (роль которых очень велика). Это позво-

ляет дать истолкование явлений интерференции, понимаемых в смысле обычной оптики¹⁾.

То обстоятельство, что при измерении в начальном состоянии вероятность собственного значения β_k наблюдаемой B будет равна $\left| \sum_i c_i s_{ik} \right|^2$, а не $\sum_i |c_i|^2 |s_{ik}|^2$, на первый взгляд может показаться противоречащим теореме умножения вероятностей. В действительности это не так. Величина $\sum_i |c_i|^2 |s_{ik}|^2$ есть та вероятность, которая должна получиться, если сначала измерить A , а затем B , ибо она равна сумме произведений вероятности получить сначала собственное значение α_i величины A на вероятность того, что (после того как уже получено значение α_i величины) будет получено собственное значение β_k наблюдаемой B . Вероятность такого события вовсе не обязана быть равна вероятности получить значение β_k наблюдаемой B при измерении ее непосредственно в начальном состоянии.

Некоторые недоразумения здесь могут возникать из-за того, что в математической статистике обычно принимают, что измерение одной случайной величины (как правило, макроскопической), которое статистики называют общим термином «испытание», никак не сказывается на вероятностях других случайных величин. Например, чтобы найти корреляцию между ростом и окружностью груди группы призывников, измеряют эти величины у всех призывников, считая что измерение роста не влияет на окружность груди, и наоборот. Поэтому если через x обозначить рост, а через y — окружность груди, то

$$\text{Prob}(x_k) = \sum_i \text{Prob}(y_i) P_{y_i}(x_k), \quad (4)$$

где $P_{y_i}(x_k)$ — вероятность того, что призывник с окружностью груди y_i имеет рост x_k , причем здесь нет необходимости уточнять, проводилось ли измерение x до измерения y или наоборот. Такие кажущиеся совершенно естественными предположения справедливы лишь для макроскопических величин. В микроскопической же области квантовых явлений измерение одной случайной величины (испытание) влияет на вероятности других величин. Вероятности значений величины A не одинаковы до и после измерения величины B . Вероятность получить некое значение наблюдаемой B после предварительного измерения величины A , правильно описывается теоремой умножения вероятностей (и равна $(\sum_i |c_i|^2 |s_{ik}|^2)$), но она не равна вероятности $(\left| \sum_i c_i s_{ik} \right|^2)$ получить то

¹⁾ В дальнейшем де Бройль отказался от употребления термина «интерференция вероятностей», ставшего обычным в квантовой теории, и вернулся к своему первоначальному представлению о реально существующей физической волне (а именно волне де Бройля v с той же фазой, что и u волны ψ , но с иной амплитудой), которая интерферирует в обычном смысле этого слова и определяет движение частицы в соответствии с законом, учитывающим статистические предсказания, возможные на основе волны ψ , которая, очевидно, сохраняет лишь статистический смысл. — Ж. Л.

же самое значение величины B при ее измерении непосредственно в начальном состоянии¹⁾.

5. НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ, К КОТОРЫМ ПРИВОДИТ ОТСУТСТВИЕ ПОНЯТИЯ ТРАЕКТОРИИ²⁾

Мы видели, что в волновой механике понятие траектории теряет смысл, по крайней мере в тех случаях, когда мы выходим за рамки применимости приближения геометрической оптики при описании распространения волн ψ .

Пока это приближение применимо, можно сохранять понятие траектории и рассматривать почти точечные волновые пакеты, распространяющиеся по траекториям-лучам, но когда речь заходит, например, о явлениях интерференции и дифракции, понятие луча, а следовательно, и траектории лишается смысла.

Для частицы в обычном пространстве (или точки, характеризующей систему в конфигурационном пространстве) путем измерений можно установить лишь *дискретный* ряд положений. В промежутках между этими измеренными положениями частице (или изображающей точке в конфигурационном пространстве) в принципе нельзя приписать никакой траектории. Отсюда следуют

¹⁾ Пусть в колоде 32 карты. Каждая карта имеет масть (червовую, пиковую, трефовую или бубновую) и «старшинство» (туз, король, . . .). Можно, открывая карту, называть сначала масть, а потом старшинство. Статистики делают неявное предположение, что констатация масти не может повлиять на вероятность старшинства. Вероятность открыть «короля», *после того* как мы узнали масть карты, равна $1/8$, и вероятность открыть «короля» *до того*, как станет известна масть карты, та же самая: $4 \times 1/4 \times 1/8 = 1/8$. Но с точки зрения логики ничто не мешает предположить, что констатация масти влияет на вероятность старшинства. Например, можно принять, что если карта красной масти (черви или бубны), то вероятность открыть «короля» равна нулю, а если карта черной масти (трефы или пики), то вероятность открыть «короля» равна единице. Тогда вероятность открыть «короля» после установления цвета карты по теореме о вероятностях сложных событий будет равна $1/2 \times 0 + 1/2 \times 1 = 1/2$. — Л.Б.

В данном примечании автора кратко разбирается пример, который он рассматривал ранее в статье «Статистика чистых состояний в волновой механике» [V, 44; III, 8]. Де Бройль отмечает [II, 29, с. 60], что выводы, сделанные им в его статье, вызвали в его уме «некое смятение, которое, вне всякого сомнения, способствовало переходу к другой интерпретации». Эта интерпретация в значительной мере основана на более глубоком изучении схемы квантовой статистики и на мысли о том, что она вполне совместима с возможностью существования схемы скрытой классической статистики. Эти проблемы рассматриваются в «Теории измерений» и в «Критическом анализе» [II, 27, 29]. — Ж. Л.

²⁾ Совершенно очевидно, что впоследствии де Бройль не мог бы дать такой заголовок! По крайней мере он добавил бы прилагательное «наблюдаемая» к слову траектория. — Ж. Л.

важные различия в той роли, которую играет вероятность в классической и волновой механике.

Рассмотрим, исходя из представлений классической механики, совокупность возможных траекторий, соответствующих одной и той же функции Якоби S . Из теории Якоби следует, что все траектории нужно рассматривать как лучи, вдоль которых распространяются волны с волновыми поверхностями, совпадающими с поверхностями постоянных значений функции S . Если бы мы имели дело с бесконечно большим числом частиц, движущихся по всем траекториям рассматриваемой совокупности, то пространственная плотность числа частиц выражалась бы, как мы видели, формулой $\rho = |\psi|^2$, где ψ — волна, соответствующая теории Якоби. Если же имеется лишь одна частица, то она движется только по одной из траекторий, и величина $|\psi|^2$ дает тогда вероятность найти частицу в данной точке в данный момент времени. Вероятность здесь появляется вследствие того, что мы не знаем, по какой из траекторий фактически движется частица. В принципе уравнение такой траектории и уравнение движения по ней можно найти, если заданы начальные положения и скорость частицы. Но если эти начальные данные нам известны не полностью, то мы можем установить лишь, какие траектории *возможны* и вычислить лишь вероятность найти частицу в точке M в момент времени t . Если наблюдения показали, что частица находится в точке M в момент t , то мы знаем, что частица движется по траектории, проходящей через точку M , и с этого момента уверены, что частица может быть обнаружена только на этой траектории. В вероятности $|\psi|^2$, отличной от нуля в некоторой области пространства, находило выражение лишь то, что мы не знали истинной траектории; вероятность теряет свое значение, как только нам становится известна истинная траектория. Такова точка зрения классической механики. Она полностью согласуется с интуитивными и традиционными представлениями классической науки. В частности, она признает детерминированность движения, так что вероятность вводится лишь постольку, поскольку мы не знаем тех факторов, зная которые мы могли бы определить истинную траекторию.

Совсем иной является [теперешняя]¹⁾ точка зрения волновой механики. Для нее понятие траектории служит первым приближением, справедливым лишь в том случае, когда распространение волны ψ можно описывать в рамках геометрической оптики. Когда же геометрическая оптика становится неприменимой, в частности, когда мы имеем дело с интерференцией или дифракцией волны ψ , понятие траектории теряет свою определенность и мы можем говорить лишь о последовательности положений частицы в трехмерном пространстве (или изображающей точки в конфигурационном пространстве), установленных путем измерения (в общем смысле этого слова). При этом вероятность выступает уже в новой роли. Она не является больше выражением того, что мы не знаем траекторию (поскольку траектории больше нет), и

¹⁾ Уточняющее определение «теперешняя» было добавлено позже автором, который, несомненно, уже не считал очевидной точку зрения, излагаемую в данном разделе. — Ж. Л.

уже упоминавшиеся мной рассуждения фон Неймана показывают, что она не связана с существованием других переменных, значение которых нам неизвестно (скрытых параметров). Детерминированности больше нет, есть только вероятности. Другими словами, ничто не дает нам возможности точно предсказать (за исключением специальных случаев) результат измерения. Мы можем указать лишь вероятность каждого возможного результата измерений.

При переходе от классической механики к волновой, т. е. от геометрической оптики к волновой с волнами ψ сохраняется только выражение $|\psi|^2$ для вероятности нахождения частицы, но в волновой механике это выражение не обусловлено существованием скрытой траектории.

На Сольвеевском конгрессе 1927 г., где новые представления оказались предметом жарких дискуссий, Эйнштейн выступил против таких представлений и указал на некоторые следствия новых представлений, плохо согласующиеся с нашей интуицией. В частности, он привел следующий пример. Предположим, что частица под прямым углом падает на экран с круглым отверстием. За экраном располагается фотопленка в форме полусферы большого радиуса.

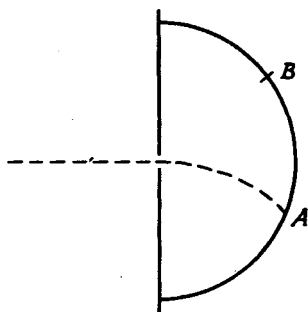


Рис. 9

Если размеры отверстия очень малы, то волна ψ связанная с частицей, при прохождении через него будет дифрагировать, так что на полусферической фотопленке ее амплитуда будет почти постоянной, поскольку отверстие играет роль малого источника. Если в данный момент времени t наблюдение укажет (по изображению на фотопленке) на присутствие частицы в точке A фотопленки, то объяснение этого явления будет совсем разным в зависимости от того, будем ли мы исходить из классических или из новых представлений. С точки зрения классической механики можно сказать, что частица, проходящая через отверстие в экране, движется по определенной траектории, которая обязательно должна попасть на фотопленку в определенной точке (штриховая линия на рисунке). Но до тех пор, пока мы не обнаружим следа частицы на полусферической фотопленке, мы не знаем, по какой из траекторий она движется в действительности, а потому и приписываем каждой точке экрана отличную от нуля вероятность нахождения частицы (равную $|\psi|^2$). Как только

обнаружено попадание частицы в точку A , нам становится известной ее траектория и вероятность найти частицу во всех других точках B полусферической фотопленки становится равной нулю.

Если же исходить из новых представлений, то мы должны будем допустить, что траекторий нет (а распространение волны справа от экрана есть результат дифракции). Пока попадание частицы в точку A не установлено, частица в некотором смысле потенциально присутствует на всей поверхности фотопленки с вероятностью $|\psi|^2$. Как только частица обнаруживается в точке A , вероятность ее нахождения в любой другой точке B полусферической фотопленки становится равной нулю, поскольку с волной ψ связана лишь одна частица. Этот факт, получающий столь простую интерпретацию в том случае, когда допускается существование траектории, становится здесь более таинственным. В самом деле, на основе наших классических (даже релятивистских) представлений о пространстве и времени невозможно понять, каким образом факт засвечивания фотопленки в точке A мгновенно делает невозможным такое же засвечивание фотопленки во всех других ее точках, если не считать, что частица в любой момент времени локализована в пространстве и с течением времени движется по некоей траектории. Если в соответствии с представлениями новой механики мы отказываемся от понятия траектории, то вынуждены мыслить частицу как некую сущность, которая, будучи неделимой и допускающей локализацию, тем не менее в действительности в общем случае не локализована в пространстве и во времени. В некотором смысле она виртуально присутствует в пределах всей протяженности волнового пакета, что четко выразил Бор, сказав: «частицы — это целостности, расплывчато ограниченные в протяженных областях пространства-времени»¹⁾. В примере Эйнштейна частица как бы размазана в виртуальном состоянии во всем пространстве за плоским экраном; в момент, когда возникает фотографическое изображение в точке A , частица, так сказать, стягивается в точку, чтобы вызвать в ней наблюдаемый эффект. Никакой механизм, основанный на классических или даже релятивистских представлениях о пространстве и времени, по-видимому, не может объяснить такое мгновенное стягивание, которое, впрочем, тесно связано с неделимым характером частицы. Принимая релятивистские представления о пространстве и времени, Эйнштейн рассматривал данный вывод как возражение против волновой механики. Сейчас же, когда новые представления выглядят более устоявшимися, необходимо, по-видимому, сделанный вывод рассматривать как указание на неадекватность наших представлений о пространстве и времени, хотя бы даже и уточненных в теории относительности.

¹⁾ Именно эта фраза побудила де Бройля менее чем два года спустя сказать, что Бор — «немного Рембрандт в современной физике, поскольку у него иной раз обнаруживается особая склонность к светотени» [1, 25, с.14; III, 6, с. 132]. Вскоре он вынужден был отказаться от точки зрения Бора, присоединился к взглядам Эйнштейна и стал считать, что, как бы трудно это ни было, следует вернуться к ясным образам классической физики. — Ж. Л.

Впрочем, не следует забывать, что представление о «локализации», соответствующее корпускулярному аспекту, должно рассматриваться как одна из крайностей. На практике оно всегда должно сочетаться с дополнительным представлением о «динамическом состоянии», которое соответствует волновому аспекту ($\psi = E/h$, $\lambda = h/p$). Но этот второй аспект, очевидно, оказывается «трансцендентным» для пространственно-временных представлений (плоская монохроматическая волна, соответствующая вполне определенному состоянию движения, заполняет все пространство и все время!)¹⁾, а лишь на его основе могут быть сформулированы законы сохранения энергии и импульса. Именно в этом смысле, согласно Бору, «неделимость частиц, выходящая за рамки пространства-времени, удовлетворяет требованиям причинности»²⁾.

Чтобы лучше проиллюстрировать понятия новой механики, рассмотрим еще один пример, приводившийся Гейзенбергом. Пусть имеется полупрозрачное зеркало M , на которое падает световой пучок.

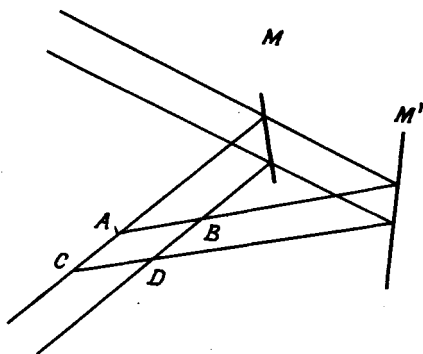


Рис. 10

Падающая волна разделяется на отраженную и проходящую. Нельзя сказать, что, придя на зеркало, частица «выбирает» между отраженной и проходящей волнами, так как приход частицы на зеркало не относится к числу наб-

¹⁾ Это замечание позднее привело де Бройля к отказу от приписывания плоской волне какой-либо физической реальности: «Плоская волна — абстракция; на опыте мы всегда имеем дело с волновыми пакетами, ограниченными в пространстве, продолжительность прохождения которых через данную точку ограничена во времени» [II, 26, с. 238]. — Ж. Л.

²⁾ Вернее было бы сказать «требованиям законности» (в смысле Мейерсона). — Л. Б.

В дальнейшем [II, 29, с. 37] автор вернулся к этому анализу и показал, что он может, напротив, служить аргументом в пользу связанной с частицей волны, распространяющейся в физическом пространстве и «содержащей очень малую область с большой концентрацией». — Ж. Л.

людаемых фактов. Пока положение частицы не установлено измерениями, она в потенциальном состоянии существует как в отраженной, так и в проходящей волне. Если в данный момент времени удастся установить присутствие частицы в одном из пучков (отраженном или проходящем), то тогда второй пучок по этой самой причине перестает существовать как соответствующий нереализованной возможности, что и показывает «необъективный» характер волны ψ . Если же вместо того, чтобы определять присутствие частицы в одном из двух пучков, взять второе зеркало M' , то в области $ABCD$ возникнет интерференция, соответствующая изменениям вероятности нахождения частицы в данной области. Это показывает, что до тех пор, пока присутствие частицы в одном из пучков не установлено, необходимо учитывать оба пучка — отраженный и проходящий.

6. ДИСКУССИИ О «КОРРЕЛИРОВАННЫХ» СИСТЕМАХ

Оживленные и интересные дискуссии, в которых приняли участие известные ученые, вызвал вопрос о коррелированных системах, т. е. о таких системах, которые, будучи приведены во взаимодействие, переходят в такие состояния, вероятности которых не являются больше независимыми.

Начало дискуссии по этому вопросу положила работа Эйнштейна, Подольского и Розена [22], комментарии по поводу которой содержатся в статье Шредингера [23] и ответ на которую дается в статье Бора [24]. Дополнительные замечания по этому вопросу можно найти также в работе Фарри [25].

Я изложу суть затронутой в дискуссиях трудности сначала абстрактно. Рассмотрим в самом общем случае две системы 1 и 2. Обозначим через x_1 совокупность координат, характеризующих систему 1, а через x_2 — совокупность координат, характеризующих систему 2. В начальный момент системы «разделены», т. е. не взаимодействуют; в этом случае волновая функция системы имеет вид

$$\psi(x_1, x_2) = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2) \quad (\text{см. с. 64}).$$

Затем системы взаимодействуют между собой, после чего они разделяются, т. е. взаимодействие прекращается. Чтобы разложить функцию ψ в ряд, рассмотрим две величины $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$, относящиеся к обеим системам (и соответствующие полной системе операторов). Пусть $\alpha_i^{(1)}$ и $\varphi_i^{(1)}$ — собственные значения и собственные функции оператора $A^{(1)}$; $\alpha_i^{(2)}$ и $\varphi_i^{(2)}$ — собственные значения и собственные функции оператора $A^{(2)}$. На протяжении взаимодействия в любой момент времени имеем

$$\psi(x_1, x_2, t) = \sum_{i,k} c_{ik}(t) \varphi_i^{(1)} \varphi_k^{(2)}, \quad (5)$$

причем коэффициенты разложения c_{ik} найдем по методу вариации постоянных. После окончания взаимодействия получим

$$\psi = \sum_{i,k} c_{ik} \varphi_i^{(1)} \varphi_k^{(2)}, \quad (6)$$

где величины c_{ik} уже не зависят от времени. В ряде случаев предыдущее разложение может быть записано в виде

$$\psi = \sum_{i,i'} c_{ii'} \varphi_i^{(1)} \varphi_{i'}^{(2)}, \quad (7)$$

где каждому значению i соответствует одно и только одно значение i' и наоборот.

Если после взаимодействия измеряют величину $A^{(2)}$ для системы 2 и получают значение $\alpha_i^{(2)}$, то на основании общих принципов волновой механики можно утверждать, что система 1 находится в состоянии, для которого величина $A^{(1)}$ имеет собственное значение $\varphi_i^{(1)}$. В результате взаимодействия возникла «корреляция» между собственными значениями величин $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$, несмотря на то, что системы разделены.

Может показаться, что данное утверждение противоречит здравому смыслу. До сих пор мы говорили, что если система находится в состоянии, в котором величина A не имеет определенного значения, но может принимать целый ряд возможных значений, и если мы точно измерим величину A , то мы переведем систему в состояние, в котором A имеет вполне определенное значение. При этом само измерение величины A приводит к неконтролируемому возмущению системы, вследствие которого мы теряем сведения о значениях величин, не коммутирующих с A . Это мы объясняли тем, что при измерении мы обязательно воздействуем на систему, причем существование кванта действия не позволяет сделать такое воздействие бесконечно малым. Что же касается коррелированных систем, то здесь возникает парадоксальная ситуация: измерение проводится над системой 2, которая по предположению отделена от системы 1, а в результате изменяется состояние системы 1. Как выразился Шредингер, «это было бы магией» (Das wäre Magie).

Можно было бы, очевидно, выйти из затруднительного положения, заявив, что опыт, проведенный над системой 2, не меняет состояния системы 1, а меняет лишь наши знания о состоянии системы 1. Но тогда пришлось бы допустить, что после взаимодействия величина $A^{(1)}$ имеет определенное значение и что наличие в функции ψ нескольких членов характеризует лишь наше незнание этого точного значения $A^{(1)}$. Тогда вероятности, вводимые в волновой механике, были бы следствием лишь нашего незнания истинного значения величин, а не недетерминированности этих значений, что привело бы нас к «классической» интерпретации волновой механики. Но, как следует из рассмотренных выше результатов, в частности из интерференции вероятностей, и как более подробно будет показано далее, подобного рода классическая интерпретация волновой механики неприемлема. В общем случае величины не имеют числовых значений до измерения; именно измерение в некотором смысле *создает* значение величины. Такое представление может казаться вполне приемлемым, когда измерение производится над системой, к которой относится измеряемая величина, но оно кажется невозможным, если измерение производится над другой системой, совершенно не связанной с первой.

Чтобы еще больше подчеркнуть характер возникающей трудности, Эйнштейн, Подольский и Розен указали на то обстоятельство, что физик свобо-

ден «в выборе» проводимого им измерения. Вместо того чтобы рассматривать величины $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$, мы можем взять другие величины $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$, имеющие собственные значения и собственные функции $\beta_i^{(1)}$, $\chi_i^{(2)}$ и $\beta_i^{(2)}$, $\chi_i^{(1)}$. Может оказаться (Эйнштейн, Подольский и Розен демонстрируют это на примере, который мы разберем далее), что после измерения волновая функция ψ будет иметь вид

$$\psi = \sum_{i, i'} c_{ii'} \varphi_i^{(1)} \varphi_{i'}^{(2)} = \sum_{k, k'} d_{kk'} \chi_k^{(1)} \chi_{k'}^{(2)}, \quad (8)$$

где между i и i' , а также между k и k' имеется взаимно однозначное соответствие. Тогда если после взаимодействия мы измерим величину $A^{(2)}$, относящуюся к системе 2, и если для нее получим значение $\alpha_{i'}^{(2)}$, то мы будем знать, что величина $A^{(1)}$ для системы 1 имеет значение $\alpha_i^{(1)}$. Если же мы измерим величину $B^{(2)}$ и для нее получим значение $\beta_{k'}^{(2)}$, то тем самым мы будем знать, что величина $B^{(1)}$ для системы 1 имеет значение $\beta_k^{(1)}$. Таким образом, после взаимодействия физик может по своему выбору измерять для системы 2 либо $A^{(2)}$, либо $B^{(2)}$, причем это имеет место также и в том случае, когда величины $A^{(2)}$ и $B^{(2)}$ не коммутируют между собой и не могут быть измерены одновременно. Стало быть, даже не имея контакта с системой 1, отделенной от системы 2, мы вынуждены приписывать точные значения либо $A^{(1)}$, либо $B^{(1)}$ в зависимости от измерений, относящихся к системе 2. Этот результат еще более парадоксален и даже кажется противоречащим соотношению неопределенностей Гейзенберга, если $A^{(1)}$ и $B^{(1)}$ — канонически сопряженные величины типа x и p_x .

Эйнштейн, Подольский и Розен приняли следующее определение для «физической реальности наблюдаемой величины»: «если можно, *никоим образом не возмущая систему*, с определенностью предсказать численное значение некой физической величины, то существует объект физической реальности, соответствующий этой величине». В рассмотренном выше случае величины $A^{(1)}$ и $B^{(1)}$ обладают физической реальностью после взаимодействия систем и, поскольку в волновой механике невозможно одновременно точно определить числовые значения канонически сопряженных величин $A^{(1)}$ и $B^{(1)}$, согласно названным авторам, можно сделать вывод, что волновая механика «не дает полного описания физической реальности».

Чтобы обсудить вопрос более детально, разберем теперь пример Эйнштейна, Подольского и Розена, который позднее анализировался Шредингером.

Рассмотрим две частицы, движущиеся вдоль оси x . Здесь мы имеем дело с двумя системами, каждая из которых определяется одной координатой: x_1 — для первой системы и x_2 — для второй системы. Предположим, что волновая функция системы имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(x_1, x_2) &= \int \int \delta(a - b) \delta(x_1 - a) \delta(x_2 - b) da db = \\ &= \int \delta(x_1 - a) \delta(x_2 - a) da. \end{aligned} \quad (9)$$

Поскольку

$$\delta(x_1 - a) = \int \exp[2\pi i k(x_1 - a)] dk, \quad (10)$$

можно также написать

$$\psi(x_1, x_2) = \iiint \exp[2\pi i k_1(x_1 - a)] \exp[2\pi i k_2(x_2 - a)] dk_1 dk_2 da,$$

$$\psi(x_1, x_2) = \iint \delta(k_1 + k_2) \exp[2\pi i(k_1 x_1 + k_2 x_2)] dk_1 dk_2, \quad (11)$$

$$\psi(x_1, x_2) = \int \exp[2\pi i k_1(x_1 - x_2)] dk_1.$$

Из этих различных выражений для ψ следует, что: 1) если измерить x_2 , то получим $x_1 = x_2$; 2) если измерить k_2 , то будем иметь $k_1 = -k_2$ (k_1 и k_2 с точностью до множителя $1/h$ являются импульсами обеих частиц)¹⁾.

Какой физический смысл имеет функция ψ ? Чтобы установить это, предположим, что у нас имеется экран с очень узкой прямоугольной щелью. Если в плоскости экрана перпендикулярно щели положение точки характеризуется переменной x , то положение щели будет определяться значением $x = a$.

Пусть по нормали к одной из сторон экрана падает волна, сопоставляемая частице 1, и волна, сопоставляемая частице 2, и обе частицы движутся равномерно и прямолинейно. За экраном волновая функция ψ системы из двух частиц имеет указанный выше вид, поскольку она равна нулю всюду, кроме точки $x = a$, соответствующей щели, и поскольку обе частицы должны пройти через щель, чтобы попасть в пространство за экраном. Предположим, что мы точно знаем импульс экрана вдоль оси Ox . В этом случае нам неизвестно положение щели и все значения величины a равновероятны. В связи с этим мы имеем выражение

$$\psi = \int \delta(x_1 - a) \delta(x_2 - a) da,$$

которое соответствует присутствию двух частиц в щели при совершенно неопределенном положении самой щели.

Но поскольку мы точно знаем импульс экрана, который по предположению не изменяется при прохождении частицы через щель²⁾, то из закона со-

¹⁾ Другими словами, $x_1 - x_2 = 0$, $k_1 + k_2 = 0$. Может существовать состояние ψ , для которого $x_1 - x_2$ и $p_1 + p_2 - k_1 + k_2$ имеют точные значения, поскольку $[(x_1 - x_2), (p_1 + p_2)] = [x_1, p_1] + [x_1, p_2] - [x_2, p_1] - [x_2, p_2] = 0$, так как $[x_1, p_2] = [x_2, p_1] = 0$ и $[x_1, p_1] = [x_2, p_2] = \hbar/2\pi i$. — Л. Б.

²⁾ См. замечание на с. 182. — Л. Б.

хранения составляющей импульса по оси x следует, что $k_1 + k_2 = 0$, так как все значения k_1 равновероятны, а это позволяет получить другое выражение для функции ψ , а именно

$$\psi = \iint \delta(k_1 + k_2) \exp[2\pi i(k_1 x_1 + k_2 x_2)] dk_1 dk_2.$$

Но, согласно Эйнштейну, Подольскому, Розену, мы можем по своему усмотрению измерять x_2 или k_2 , что позволяет нам либо приписать положению частицы 1 значение $x_1 = x_2$, либо приписать импульсу той же частицы (деленному на h) значение $k_1 = -k_2$, и, поскольку характер одного из этих двух измерений не влияет на первую частицу, этой частице без какого-либо воздействия на нее мы можем приписать либо положение, либо импульс. Это и приводит к отмеченной выше трудности.

Следует признать, что в приведенном нами изложении рассмотренный пример представляется совершенно неподходящим. В самом деле, из вида функции ψ явствует, что положение частицы 1 совпадает с положением частицы 2. Поэтому здесь нельзя говорить, что системы разделены, а если они не разделены, то больше не существует и парадокса, так как любое измерение первой частицы, очевидно, затрагивает и вторую частицу. Чтобы избежать этого возражения, Эйнштейн, Подольский и Розен исследовали не рассмотренное выше выражение для ψ , а функцию ψ вида

$$\begin{aligned} \psi &= \iint \delta(x_1 - a) \delta(x_2 - b - d) \delta(a - b) da db = \\ &= \int \delta(x_1 - a) \delta(x_2 - a - d) da, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \psi &= \iint \delta(k_1 + k_2) \exp[2\pi i(k_1 x_1 + k_2 x_2)] \exp(-2\pi i k_2 d) dk_1 dk_2 = \\ &= \int \exp[2\pi i k_1 (x_1 - x_2 + d)] dk_1, \end{aligned}$$

где d — отличная от нуля постоянная. При таком выражении для ψ можно видеть, что измерение k_2 для частицы 2 всегда приводит к $k_1 = -k_2$, но измерение x_2 для частицы 2 влечет за собой $x_1 = x_2 - d$. Таким образом, мы снова приходим здесь к такому же парадоксальному выводу, как и в рассмотренном ранее примере, но поскольку равенство $x_1 = x_2$ уже не имеет более места, то, по-видимому, системы можно считать разделенными, так что пример, казалось бы, более полно иллюстрирует характер возникающей трудности.

В действительности же введение параметра d не дает заметного преимущества. Это становится очевидным, если попытаться дать физическую интерпретацию новому выражению для ψ , как это делал в своей статье Бор. В самом деле, рассмотрим экран не с одной очень узкой щелью, а с двумя параллельными узкими щелями, расположенными на расстоянии d одна от другой. В начальный момент две частицы характеризуются плоскими монохроматическими волнами, падающими по нормали с одной стороны на экран.

Если в начальный момент нам точно известен импульс p_x экрана вдоль оси Ox , то положение экрана вдоль оси Ox (а следовательно, и абсцисса a первой щели) остается неизвестным, поскольку все значения x будут равновероятны. Тогда значение волновой функции ψ системы сзади экрана будет характеризоваться формулой $\psi = \int \delta(x_1 - a) \delta(x_2 - a - d) da$, выражающей факт при-

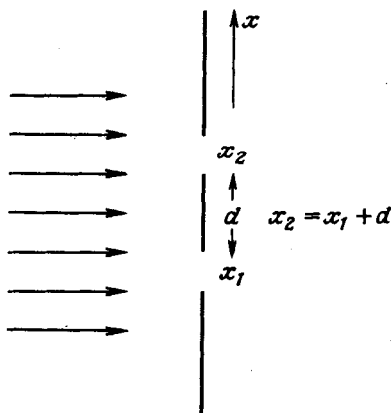


Рис. 11

сутствия частицы 1 в первой щели и частицы 2 во второй при неопределенном положении двух щелей.

Если импульс экрана не изменяется, то мы должны иметь $k_1 + k_2 = 0$, что соответствует выражению

$$\psi = \iint \delta(k_1 + k_2) \exp[2\pi i(k_1 x_1 + k_2 x_2)] \exp(-2\pi i k_2 d) dk_1 dk_2.$$

Замечание. На первый взгляд может показаться, что здесь, как и на с. 180, делается произвольное предположение, что экран не обменивается с частицами импульсами. Это возражение нетрудно устранить. Обозначим через x_0 координату первой щели и для учета импульса экрана обозначим через K_0 заданное значение его начального импульса, а через K_1 — его конечный импульс. Тогда

$$\psi = \iiint \delta(k_1 + k_2 + K_1 - K_0) \exp \times (2\pi i k_1 x_1) \exp[2\pi i k_2 (x_2 - d)] \times \\ \times \exp[2\pi i (K_1 - K_0) x_0] dk_1 dk_2 dK_1, \quad (13)$$

$$\psi = \iiint \int \exp[-2\pi i(k_1 + k_2 + K_1 - K_0)a] \dots dk_1 dk_2 dK_1 da,$$

$$\psi = \int \delta(x_1 - a)\delta(x_2 - a - d)\delta(x_0 - a)da.$$

Это выражение показывает, что если измерить координату x_1 первой щели, мы получим $x_1 = x_0$ и $x_2 = x_0 + d$, а если измерить K_1 и k_1 то мы получим соотношение $k_2 = K_0 - K_1 - k_1$, выражающее закон сохранения импульса. В предыдущих рассуждениях неявно предполагалось, что в результате измерения получено $K_1 = K_0$.

Выяснив таким образом физический смысл рассмотренной нами функции ψ , мы видим, что, поскольку участок экрана шириной d осуществляет передачу импульса между двумя частицами, частицы следует считать взаимодействующими между собой, когда $x_2 = x_1 + d$. Но в таком случае их нельзя считать «изолированными», и мы снова видим, что по крайней мере частично трудность связана с точным смыслом слова «изолированные», задача определения которого в волновой механике усложняется тем, что в общем случае не может быть точной локализации частицы в заданном состоянии ψ .

В своей работе, явившейся ответом на работу Эйнштейна, Подольского и Розена, Бор подчеркнул то обстоятельство, что в квантовой механике *нельзя отрывать математический формализм от экспериментальных устройств, при помощи которых производится измерение*. Поэтому он сразу же дал физическую интерпретацию функции ψ , рассматриваемой Эйнштейном, Подольским и Розеном, взяв экран с двумя щелями. И тогда стало ясно, что два *возможных* вида измерений (положений и импульсов) соответствуют разным экспериментальным устройствам. При измерении положений необходимо закрепить экран на макроскопическом основании, определяющем нашу пространственную систему координат. Тогда первая щель будет иметь известную координату $x_0 = a$ и мы получим $x_1 = x_0$ и $x_2 = x_1 + d$. Однако сведения об импульсе полностью теряются, поскольку, если щель жестко закреплена в нашем устройстве, то импульс отдачи экрана теряется в основании устройства. Если же мы хотим измерить импульс, то необходимо измерить начальное и конечное значения импульса экрана, а для этого нужно, чтобы он сохранял свою подвижность, откуда следует, что нельзя будет точно узнать координаты щелей. В этом случае изменение $K_0 - K_1$ импульса экрана известно и измерение величины k_2 дает для k_1 значение $k_1 = -k_2 + K_0 - K_1$. Задачу нельзя рассматривать абстрактно, в отрыве от экспериментального устройства, поскольку с самого начала опыта необходимо сделать приготовления, соответствующие одному из возможных видов измерений. Бор выразил его следующими словами: «Мы здесь имеем дело не с неполным описанием, основанным на произвольном выборе некоторых элементов физической реальности, при котором теряются сведения о некоторых других элементах реальности, а с рациональным выбором одного из существенно различающихся экспериментальных устройств и одной из существенно различающихся процедур, позволяющих либо недвусмысленно пользоваться представлением о пространственно-временной локализации, либо обоснованно применять закон сохранения импульса». В

этой связи Бор сделал также важное замечание¹⁾, что в конечном счете импульс всегда измеряют, передавая его какому-либо макроскопическому телу, к которому можно применить понятия классической механики и импульс которого вследствие этого можно определить по двум значениям координаты, измеренным с достаточно большим временным интервалом.

Впрочем, «эксперименталистская» точка зрения Бора, как нам представляется, согласуется с замечанием о том, что в действительности две системы не являются «разделенными» в момент выбора между двумя возможными измерениями. Когда, сделав выбор, собирают соответствующую экспериментальную установку, состояние в рассматриваемом примере характеризуется приведенной выше функцией ψ и нельзя говорить, что системы разделены²⁾. Напоминая определение физической реальности Эйнштейна, Подольского, Розена, Бор в этом определении считает двусмысленными слова «никоим образом не возмущая систему». По этому поводу он говорит: «В последней части рассматриваемого опыта нет никакого механического возмущения изучаемой системы, но тем не менее оказывают свое влияние условия, которыми определяются возможные типы предсказаний, относящихся к будущему поведению системы». Такие условия — неотъемлемый элемент описания любых явлений, к которым приложим термин «физическая реальность». Бор отвергает вывод о том, что даваемое в волновой механике описание является неполным. Напротив, ему представляется, что это описание основано на «рациональном использовании всех возможностей недвусмысленной интерпретации измерения, совместимых с тонким и неконтролируемым взаимодействием, которое в квантовой теории всегда существует между объектами и измерительными приборами». В этом Бор усматривает существенный аспект дополнителности.

¹⁾ Позднее де Бройль зачеркнул слово «важное», заменив его словами «довольно сомнительное», а после слова «всегда» поставил знак вопроса. Комментируя в работе [1, 26] это замечание Бора, он назвал его «спорным» и добавил: «В противоположность этому нам представляется, что импульс частицы никогда не измеряют таким способом, но вычисляют по наблюдаемому положению другой частицы, применяя, если нужно, закон сохранения импульса». К этому он мог бы добавить: или непосредственно по положению первой частицы после ее прохождения через устройство, разделяющее волновые пакеты соответственно их импульсам. Везде, где Бор рассматривает обмен между частицей и измерительным прибором, де Бройль вводит разделение волновых пакетов, что дает возможность свести измерение любой величины к измерению положения. — Ж. Л.

²⁾ В дальнейшем, опираясь на эти критические замечания, де Бройль никогда не считал серьезной проблемой парадокс Эйнштейна, Подольского и Розена [1, 26, с. 77; 11, 33, с. 169]. Любопытно, что он, по-видимому, никогда не проявлял интереса к возможному объяснению, предложенному Бомом [26], которое в настоящее время стало предметом широкого обсуждения. — Ж. Л.

7. ДОПОЛНЕНИЯ К ДИСКУССИИ МЕЖДУ ЭЙНШТЕЙНОМ И БОРОМ

В связи с семидесятилетием со дня рождения Эйнштейна в 1949 г. в США вышло большое юбилейное издание, посвященное основателю теории относительности, со статьями ученых всего мира. Многие ученые, работающие в области квантовой теории, такие, как Борн, Паули, Гайтлер и др., выразили в этом сборнике, порою весьма эмоционально, свое неудовлетворение тем, что Эйнштейн не отказался от отрицательного отношения к обычной интерпретации квантовой теории.

Из всех содержащихся в этой книге работ самой интересной, несомненно, является статья Бора. Бор здесь подробно рассказывает, каким образом его дискуссия с Эйнштейном о квантовой теории и его усилия по преодолению остроумных и тонких возражений, высказанных Эйнштейном, позволили ему точнее сформулировать свои взгляды.

Бор начинает с того, что напоминает историю создания старой квантовой теории. Он кратко говорит об открытии Планком кванта действия и о том, как Эйнштейн применил это понятие к теории света (к теории квантов света или «фотонов»). Говоря о трудностях, с которыми столкнулась эта гипотеза Эйнштейна при объяснении интерференции и дифракции, он напомнил, что уже в самых первых своих работах по данному вопросу Эйнштейн прекрасно видел, что для примирения дискретной структуры света с волновой теорией требуется вводить вероятности, и подчеркивал, что здесь введение вероятностей обусловлено не нашим незнанием некоего скрытого механизма, а самим существованием квантовых скачков. «В самом деле, — пишет Бор, — в квантовой физике мы оказываемся перед лицом неспособности классических рамок пространства и времени вместить странный факт неделимости, характерной для элементарных квантовых процессов».

В заключение Бор кратко излагает свою квантовую концепцию атома и говорит о подтверждающих ее экспериментах типа опыта Франка и Герца по ударному возбуждению и ударной ионизации атомов. Он подчеркивает, что представление о квантовых состояниях и скачкообразных переходах между этими состояниями, лежащие в основе его теории атома, не дает возможности сохранить в атомных явлениях детерминированность, а позволяет лишь говорить о вероятностях переходов между квантовыми состояниями и по этим вероятностям вычислять частоты, относящиеся к наблюдаемым процессам. Он напоминает, каким образом он последовательно ввел представление о вероятности переходов в своих исследованиях, относящихся к принципу соответствия, так чтобы глобально наблюдаемые явления при статистическом подходе точно описывались законами классической механики. Он далее комментирует фундаментальную работу Эйнштейна 1917 г., в которой тот анализирует взаимодействие между атомом и излучением абсолютно черного тела в состоянии термодинамического равновесия, вводя вероятности поглощения излучения атомом и вероятности испускания им спонтанного и вынужденного излучения.

Проанализировав открытие эффекта Комптона, разработку новой (волновой и квантовой) механики и осуществленное Шредингером их объединение, а также формулировку соотношений неопределенностей Гейзенберга, Бор излагает свои идеи о дополнителности, которые он высказал в сентябре 1927 г. на конференции физиков, проходившей в Комо и посвященной работам Вольты. Согласно Бору, понятие дополнителности имеет своей целью выразить неделимость элементарных квантовых процессов и разъяснить специфические аспекты, относящиеся к проблеме наблюдения в условиях эксперимента. Он добавляет: «В этой связи важно отметить, что, хотя атомные явления полностью выходят за рамки классических интерпретаций, описание всех опытных данных должно проводиться в классических терминах». Это необходимо для того, чтобы можно было описать и объяснить другим физикам суть используемых методик и экспериментальных установок. «При этом решающим моментом, — говорит Бор, — является невозможность проведения четкой границы между самими атомными объектами и измерительными приборами, служащими для определения условий, в которых протекают явления. Неделимость элементарного квантового процесса находит свое выражение в том обстоятельстве, что любая попытка детализации явления требует изменения опытной установки и связана с введением новых возможностей взаимодействия между объектами и измерительными приборами, которые в принципе не могут быть контролируемы». В связи с этим выводы, получаемые при различных экспериментальных условиях, не могут быть объединены в единую картину, но должны рассматриваться как «дополнительные» в том смысле, что лишь совокупность различных описаний (получаемых с помощью экспериментальных установок) может исчерпать всю совокупность информации, которую можно получить об атомном объекте».

Отсюда следует, что частичные образы, полученные, например, на основе представлений о частице и волне, являются неполными и взаимно ограничивают друг друга. Однако формализм новой квантовой теории во всех случаях позволяет получить точное описание фактов, которые можно наблюдать при определенных экспериментальных условиях.

Далее Бор анализирует дискуссии, проходившие в Брюсселе на V Сольвеевском физическом конгрессе. Он останавливается на возражении Эйнштейна, изложенном выше на с. 174, а также на вопросах, связанных с полупрозрачным зеркалом, рассмотренным на с. 176. В последнем случае он подчеркивает принципиально важное значение экспериментального устройства: если мы имеем только полупрозрачное зеркало M , то фотон можно обнаружить лишь либо в проходящем, либо в отраженном пучке; если же в это экспериментальное устройство добавить второе (полностью отражающее) зеркало M' , то становится возможным обнаружить интерференцию в области, где перекрываются отраженный и проходящий пучки. Далее Бор приводит свои рассуждения, которые показывают, что если изменить обычное устройство с отверстиями для опыта Юнга таким образом, чтобы мы могли сказать, через какую из щелей проходит фотон, то явление интерференции пропадает.

Бор обращает внимание на необходимость очень подробного, почти наивного описания экспериментального устройства, соответствующего тому виду

измерений, которые мы желаем осуществить, поскольку только это дает возможность однозначно и непротиворечиво применять квантовый формализм.

Возвращаясь к истории своих споров с Эйнштейном, он объясняет причину возникновения новых противоречий, проявившихся на VI Сольвеевском физическом конгрессе (Брюссель, 1930). Эйнштейн полагал, что нашел способ точного измерения энергии частицы в момент ее испускания в противоречии с соотношением $\delta E \cdot \delta t \geq h$, причем он опирался на релятивистское соотношение $E = m_0 c^2$ и на равенство инертной и тяжелой масс. Предположим, говорил он, что некое излучение заперто в ящике, в стенке которого имеется отверстие с заслонкой. Часовой механизм открывает отверстие в вполне определенный момент времени, так что в совершенно определенный момент времени из ящика может выйти фотон. Если взвесить ящик до и после испускания фотона, то по формуле $E = m_0 c^2$ можно вычислить точную энергию фотона. После жаркого спора Бору удалось найти ответ на возражение Эйнштейна; при

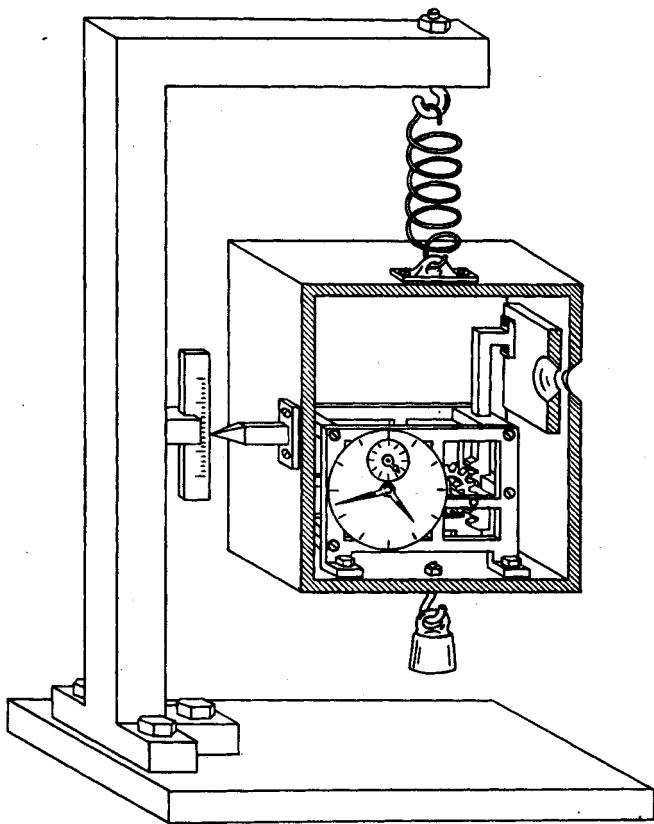


Рис. 12

этом он исходил из того, что, после того как измерен вес ящика, необходимо учитывать влияние гравитационного поля на ход часов, которое проявляется в красном смещении спектральных линий излучения, испускаемого с поверхности звезд.

Приведем рассуждения Бора. Предположим, что ящик взвешивается на пружинных весах.

Положение ящика по вертикали может быть известно лишь с неопределенностью $\Delta q \sim h/\Delta p$, где Δp — неопределенность в импульсе ящика. Но неопределенность Δp , очевидно, должна быть меньше импульса, приобретенного за полное время взвешивания T телом с массой Δm (Δm — уменьшение массы ящика). Отсюда следует, что

$$\Delta p \sim h/\Delta q < T \cdot g \Delta m. \quad (14)$$

При заданном значении Δm промежуток времени T будет тем больше, чем точнее определяется положение q ящика. Из общей теории относительности следует, что ход часов в механизме, открывающем отверстие ящика, при его вертикальном перемещении на Δq должен изменяться таким образом, чтобы показания часов по истечении времени T изменились на

$$\Delta T = \frac{1}{c^2} g \Delta q \cdot \Delta T \quad (15)$$

(соответственно выражению для ds^2 в гравитационном поле). Исключив Δq из этого и предыдущего соотношений, получим

$$\Delta T > h/c^2 \Delta m, \text{ или } \Delta T \cdot \Delta E > h, \quad (16)$$

что соответствует четвертому соотношению неопределенностей. Здесь, как и ранее, тщательный анализ экспериментального устройства позволяет устранить возникшую трудность. Сам процесс измерения изменения веса ящика в момент испускания фотона, дающий возможность найти E с неопределенностью ΔE , вносит неопределенность ΔT в значение момента времени регистрации испускаемого фотона в полном соответствии с четвертым соотношением Гейзенберга.

Бор еще раз подчеркивает, что главное — всегда рассматривать *все* экспериментальное устройство, ничего не упуская, чтобы можно было совершенно недвусмысленно применить формализм. Он переходит далее к работе Эйнштейна, Подольского, Розена, о которой мы говорили выше, и отмечает, что, хотя $[q_i, p_i] \neq 0$, тем не менее если q_1 и q_2 — координаты двух частей системы, а p_1 и p_2 — сопряженные к ним импульсы, то $[(q_1 - q_2), (p_1 + p_2)] = 0$, в чем нетрудно убедиться с учетом равенства $[q_i, p_k] = 0$ при $i \neq k$, и отсюда он выводит, что, поскольку $q_1 - q_2$ и $p_1 + p_2$ могут быть измерены одновременно, ничто не мешает предсказать значение q_1 или p_1 , если измерено либо q_2 , либо p_2 . Поэтому верно, что, рассматривая, например, прохождение частицы через отверстие в экране, в принципе после ее прохождения мы можем измерять либо положение, либо импульс экрана и в каждом случае делать

предсказания, относящиеся к последующим наблюдениям над частицей. Но существенно то, что для таких измерений требуются экспериментальные устройства, взаимно исключают друг друга. Изучая подобного рода проблемы, всегда следует помнить, что к ним нельзя подходить абстрактно. Нужно не упускать из виду, что все измерительные устройства макроскопические и что во всех наблюдаемых явлениях участвует измерительный прибор, содержащий макроскопические тела. Именно условиями, в которые экспериментатор ставит макроскопические тела, фиксируется характер сведений, которые измерительное устройство может давать о сущностях, фигурирующих на атомном уровне в процессе измерений. Математический формализм квантовой механики автоматически предусматривает все возможные процессы измерения, которые можно себе мыслить, но в каждом фактически проведенном измерении реализуется лишь один из этих процессов. Я хотел бы дополнительно отметить, что при анализе подобного рода проблем нам постоянно мешают наши интуитивные представления о пространстве и времени, даже если они уточнены теорией относительности. Одних соотношений неопределенностей достаточно, чтобы показать, что подобные пространственно-временные представления, хотя и пригодны для описания измерительных приборов и формулировки результатов измерения, тем не менее неприменимы при точном описании сущностей на атомном уровне¹⁾.

Бор заканчивает свою работу, напоминая о своих попытках, обобщив принцип дополненности, распространить его на области, лежащие вне физики; я не буду останавливаться на этом. Он обращает внимание на трудности нахождения в нашем языке терминов для адекватного выражения столь мало отвечающих нашей интуиции условий, с которыми мы здесь встречаемся. Язык людей, возникший на основе их макроскопического опыта, очень плохо приспособлен для выражения тонких понятий, необходимых для интерпретации процессов на атомном уровне. Выражения типа «внести возмущение в явление актом наблюдения» или «придать в результате измерения некоторые физические атрибуты атомному объекту» он по справедливости считает способными вводить в заблуждение. Даже когда речь идет о невозможности одновременного измерения положения и импульса частицы, имеется риск создать впечатление, что координата и импульс существуют до измерения. В действительности любая констатация, которая может быть названа «наблюдаемым явлением», связана с вполне определенной совокупностью экспериментальных устройств, и теории, относящиеся к сущностям атомного масштаба, имеют целью лишь установление связи между явлениями, последовательно наблюдаемыми при данных условиях, причем связи статистического характера.

¹⁾ В начале этого абзаца де Бройль позднее поставил знак вопроса на полях. В его собственной системе условных знаков это не вопрос, а указание на критическое отношение, как в комментариях к шахматным партиям. Ясно, что, вернувшись к пространственно-временным представлениям, он не мог больше согласиться с этим выводом. — Ж. Л.

ра. Любые попытки приписать сущностям атомного масштаба объективные физические характеристики должны быть оставлены¹⁾.

В конце юбилейного сборника Эйнштейн ответил на критические замечания, адресованные ему в связи с его отрицательным отношением к общепринятой интерпретации квантовой теории. Он заявил, что не может допустить, чтобы функция ψ волновой механики была полным описанием состояния атомной системы. Для него эта волновая функция есть описание не отдельной системы, а некоего идеального ансамбля тождественных систем. Главным аргументом Эйнштейна было то, что мы должны иметь возможность получить представление о реальности, не зависящее от процесса измерения. И действительно, если допустить существование объективной реальности, не зависящей от процессов измерения, то точка зрения, принятая в обычной интерпретации, по-видимому, должна быть оставлена. Но Эйнштейну, как мне кажется, с полным основанием можно было бы ответить²⁾, что его точка зрения есть некая априорная метафизическая гипотеза и что более логично рассматривать теоретическую физику как способ установления связи между явлениями, реально обнаруживаемыми при вполне определенных методиках наблюдения.

Впрочем, Эйнштейн признает, что обычный формализм квантовой теории очень хорошо описывает наблюдаемые явления и корпускулярно-волновой дуализм, однако, как он говорит, «я убежден, что существенно статистический характер современной квантовой теории обусловлен тем, что эта теория дает неполное описание физических систем». В качестве примера Эйнштейн приводит теорию радиоактивного распада Гамова, в которой вероятность β -распада радиоактивного ядра вычисляется на основе представления о том, что волна ψ для α -частицы может испускаться из ядра в форме расходящейся сферической волны, просачивающейся сквозь потенциальный барьер вокруг ядра.

Такое представление, говорит Эйнштейн, вполне приемлемо, если мы хотим просто изучать статистические свойства ансамбля радиоактивных ядер, но оно не может служить основой для *полного* описания одного из этих ядер, поскольку в нем не уточняется время распада, тогда как, очевидно, нужно предположить, что каждое ядро распадается во вполне определенный момент времени. Далее Эйнштейн приводит ответ, который, несомненно, дал бы ему какой-нибудь приверженец новой интерпретации квантовой физики. Суть ответа состоит в том, что время распада априори неизвестно и для его определе-

¹⁾ Нет необходимости говорить о том, с какой силой позднее де Бройль выступал против такого утверждения. Подобного рода высказывания представляют интерес по той причине, что, будучи написаны менее чем за два года до поворота в его взглядах, они свидетельствуют о той силе, которую еще имели над ним старые убеждения, несмотря на то что подспудно в нем проходила внутренняя борьба между противоположными концепциями, как об этом можно судить по другим его примечаниям. — Ж. Л.

²⁾ Позднее, не одобряя свой собственный ответ Эйнштейну, автор поставил на полях знак вопроса. — Ж. Л.

ния необходимо наблюдение, которое изменит состояние наших знаний о системе. Хотя, по мнению Эйнштейна, в этом ответе привлекаются философские понятия «физической реальности», справедливость которых он не может допустить, Эйнштейн признает его вполне приемлемым, когда речь идет об одной системе микроскопического масштаба, такой, как радиоактивное ядро.

Но он добавляет, что вместе со Шредингером можно было бы рассматривать не одно изолированное радиоактивное ядро, а систему, в состав которой, кроме ядра, входило бы и макроскопическое устройство, такое, как счетчик Гейгера, снабженный автоматическим регистрирующим прибором. В последнем может быть бумажная лента, которая равномерно движется благодаря часовому механизму и на которой при срабатывании счетчика делается отметка. В этом случае мы имеем дело с очень сложной системой, конфигурационное пространство которой содержит очень большое число измерений, но нет каких-либо логических возражений против его рассмотрения. Если учесть все возможные конфигурации, то по истечении времени, намного превышающего период радиоактивного распада атома, на ленте регистрирующего прибора появится *самое большее* одна отметка. Поскольку обычная теория дает лишь вероятности отдельных конфигураций, мы можем вычислить лишь относительные вероятности положений отметки на регистрирующей ленте. Но, как указывает Эйнштейн, положение отметки на ленте есть факт, относящийся к области макроскопической физики, чего нельзя сказать о моменте распада. Поэтому если мы рассматриваем обычную квантовую теорию как теорию, дающую полное описание отдельной системы, то мы вынуждены допустить, что положение отметки на ленте не относится к *самой* системе, но что оно существенно зависит от того, как выполняется наблюдение над лентой регистрирующего прибора. Эйнштейн допускает, что такая интерпретация возможна, но он считает ее крайне неправдоподобной.

[Чтобы тщательно проанализировать это новое возражение Эйнштейна, несомненно, необходимо провести достаточно сложный анализ. У меня создается впечатление, что было бы полезно воспользоваться представлениями фон Неймана о чистых и смешанных состояниях и замечаниями, которые я надеюсь развить в следующем году. Впрочем, я не думаю, что в этом возражении есть что-нибудь существенно новое: фактически речь здесь по-прежнему идет о микроскопических сущностях, проявления которых обнаруживаются при помощи макроскопического измерительного аппарата (счетчика Гейгера с регистрирующим прибором), к которому приложимы обычные понятия пространства и времени. Это все тот же переход от микроскопической реальности, к которой неприменимы понятия пространства и времени, к макроскопическим явлениям, воспринимаемым в рамках пространства и времени, переход, приводящий к вероятностям и неопределенностям. Обычный формализм квантовой теории, по-видимому, удовлетворительно переводит на наш «язык» эти обстоятельность, плохо согласующиеся с нашей интуицией, которая основывается на наших чувственных восприятиях и не может выйти за рамки пространства и времени при описании наблюдаемых явлений, а следовательно, и при констатации результатов

измерений¹⁾.]

Высказываясь о своей статье, написанной совместно с Подольским и Розеном, Эйнштейн заметил, что аргументация Бора очень ясна. Она сводит все к выбору между двумя следующими утверждениями:

1. Описание системы с помощью волновой функции ψ является *полным*.
2. Истинные состояния двух пространственно разделенных объектов независимы друг от друга.

Точка зрения Бора состоит в том, что принимается утверждение 1, а утверждение 2 отвергается.

Что же касается Эйнштейна, то он предпочитает принять постулат 2 и рассматривать волну ψ лишь как статистическую характеристику ансамбля систем, находящихся в одном и том же состоянии.

Как мне кажется, точка зрения Эйнштейна допускает то возражение, что определение пространственной разделенности двух систем нельзя считать простым, поскольку локализация этих систем неполная и области локализации двух систем в пространстве могут перекрываться. Впрочем, этот тонкий вопрос требует дальнейшего изучения.

Мы видим, насколько тонкими оказываются вопросы интерпретации современной квантовой теории. Самые крупные ученые нашего времени полностью расходились во мнениях по этому вопросу. Поэтому его было бы очень полезно рассмотреть в другом аспекте. Это я и постараюсь сделать в будущем году, развив концепции фон Неймана, относящиеся к роли измерения в квантовом формализме.

¹⁾ В дальнейшем автор зачеркнул абзац, заключенный здесь в квадратные скобки. Сделал он это, несомненно, тогда, когда сам принял на вооружение аргументы Эйнштейна и Шредингера [II, 26]. — Ж. Л.

О вероятностной интерпретации волновой механики и о связанных с этим проблемах

Глава XI

Основные сведения из теории вероятностей

В данной главе, не претендуя на строгость и полноту, мы кратко изложим основные понятия теории вероятностей. Желающих глубже ознакомиться с рассматриваемыми вопросами мы отсылаем к специальным руководствам, где можно найти более строгое их изложение.

1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В СЛУЧАЕ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим переменную величину X , значение x которой неизвестно, но может быть определено путем опыта или наблюдения (операция, называемая в статистике «испытанием»). Не вдаваясь здесь в обсуждение понятия вероятности, до сих пор дискутируемого специалистами, будем считать ясным смысл выражения «вероятность того, что случайная переменная величина X примет значение, меньшее x ». Такая вероятность будет даваться некоторой функцией $F(x)$ (функцией распределения вероятностей), равной нулю при $x = -\infty$ и монотонно возрастающей от 0 до 1 при возрастании x от $-\infty$ до $+\infty$.

Функция F может изменяться скачкообразно при определенных значениях x , если величина X имеет лишь дискретные значения, но она может меняться и непрерывно с изменением x , если некоему интервалу значений dx соответствует бесконечно малая вероятность $\rho(x)dx$. В первом случае $F(x)$ — ступенчатая функция, а во втором — функция с плавной кривой изменения. Эти два типа зависимостей могут существовать одновременно в разных областях интервала изменения переменной x от $-\infty$ до $+\infty$.

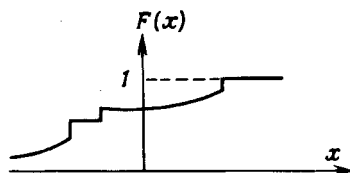


Рис. 13

Можно более конкретно представить себе эту зависимость, предположив, что $F(x)$ есть сумма, взятая от $-\infty$ до фиксированного значения x , масс, распределенных вдоль оси абсцисс, одни из которых сосредоточены в отдельных точках на оси, а другие распределены непрерывно в некоторых интервалах. Если $F(x)$ — всюду непрерывная функция, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \rho(x) dx,$$

и тогда вместо функции $F(x)$ можно рассматривать функцию $\rho(x)$, называемую плотностью распределения вероятностей. Но если вероятность отлична от нуля лишь в некоторых точках, то нужно рассматривать $F(x)$; тогда можно написать

$$F(x) = \int_{-\infty}^x dF(x)$$

в смысле интеграла Стильеса. В этой формуле подынтегральное выражение $dF(x)$ будет равно $\rho(x) dx$ там, где непрерывное распределение, и будет принимать конечные значения в точках, соответствующих дискретным значениям вероятности.

Моменты. Моментами распределения вероятностей называются величины

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x),$$

т. е. средние значения k -й степени переменной x . (Не следует забывать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = F(+\infty) - F(-\infty) = 1.)$$

Наиболее употребительны два первых момента

$$m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x), \quad m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x), \quad (1)$$

или, в случае непрерывного распределения,

$$m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x \rho(x) dx, \quad m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \rho(x) dx. \quad (2)$$

Первый момент называется средним значением или математическим ожиданием величины x .

Наряду с указанными используются обозначения $m_1 = \bar{x}$, $m_2 = \overline{x^2}$, ...

Часто рассматривается разность $x - m_1$, называемая отклонением от среднего. Дисперсия σ величины x определяется как¹⁾

среднего. Дисперсия σ величины x определяется как¹⁾

$$\sigma = \sqrt{(x - m_1)^2} = \sqrt{(x - \bar{x})^2} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^2 dF \right]^{1/2}, \quad (3)$$

т. е. это квадратный корень из среднего квадрата отклонения. Таким образом, имеем

$$\sigma^2 = m_2 + m_1^2 - 2m_1 m_1 = m_2 - m_1^2 = \bar{x}^2 - (\bar{x})^2. \quad (4)$$

Полученным выражением для σ^2 часто пользуются.

Следует заметить, что не для всех распределений существуют конечные моменты, поскольку соответствующие интегралы могут расходиться. Примером может служить распределение Коши

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2}, \quad (5)$$

для которого все моменты и дисперсия равны бесконечности.

Характеристическая функция

Характеристическая функция была введена Лапласом. В настоящее время она широко используется в теории вероятностей, особенно в задачах статистики. Ее можно ввести различным образом. Здесь мы примем следующее определение.

Характеристической функцией $\varphi(u)$, соответствующей функции распределения $F(x)$, называется функция

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} dF(x) = \overline{e^{iux}} = \text{Среднее значение величины } e^{iux}. \quad (6)$$

В случае непрерывного распределения вероятностей эта формула принимает вид

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \rho(x) dx, \quad (7)$$

а при дискретном распределении

$$\varphi(u) = \sum_n P_n e^{iux_n}, \quad (8)$$

где P_n — конечная вероятность появления значения $x = x_n$.

¹⁾ См. примечание на с. 83. — Прим. ред.

При непрерывном распределении плотность вероятности дается формулой обратного преобразования Фурье:

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) e^{-iux} du.$$

[В общем случае справедлива формула

$$F(x) - F(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \frac{\exp(-iux_0) - \exp(-iux)}{iu} \varphi(u) du, \quad (9)$$

из которой предыдущая получается как частный случай. Чтобы доказать это, достаточно заметить, что

$$\frac{\exp(-iux_0) - \exp(-iux)}{iu} \varphi(u) = \int_{x_0}^x d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \exp[iu(\varepsilon - \xi)] dF(\varepsilon),$$

и перейти к новой переменной интегрирования $\eta = \varepsilon - \xi$.]

Характеристическая функция и моменты.

Вторая характеристическая функция

Характеристическая функция тесно связана с моментами. В самом деле, разлагая $\varphi(u)$ в ряд Маклорена, имеем

$$\varphi(u) = \varphi(0) + u\varphi'(0) + \frac{u^2}{2}\varphi''(0) + \dots + \frac{u^n}{n!}\varphi^n(0) + \dots \quad (10)$$

Дифференцируя экспоненту e^{iux} в определении функции $\varphi(u)$ [формула (6)], получаем

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= 1 + iu \int_{-\infty}^{\infty} x dF + \frac{i^2 u^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) + \dots + \\ &+ \frac{(iu)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} x^n dF(x) + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Сравнив соответствующие члены в выражениях (10) и (11), получим $m_n = \overline{x^n} = i^{-n} \varphi^n(0)$ и, в частности,

$$im_1 = \overline{ix} = \varphi'(0), \quad i^2 m_2 = -\overline{x^2} = \varphi''(0). \quad (12)$$

Таким образом, если моменты существуют, их можно вычислить с помощью характеристической функции. Полученные выше формулы показыва-

ют, что знание функции $\varphi(u)$ эквивалентно знанию функции $F(x)$ [в случае непрерывного распределения — знанию функции $\rho(x)$]. Так как, зная моменты, если только они существуют, можно восстановить $\varphi(u)$ по формуле Маклорена, то, очевидно, знание всех моментов эквивалентно знанию распределения вероятностей.

Вместо характеристической функции часто пользуются другой характеристической функцией, которая есть не что иное, как логарифм первой:

$$\Phi(u) = \ln \varphi(u) = \ln \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} dF(x). \quad (13)$$

Разложение $\Phi(u)$ в ряд Маклорена дает (с учетом того, что $\varphi(0) = 1$)

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \ln \varphi(0) + u \frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)} + \frac{u^2}{2} \left(\frac{\varphi''(0)}{\varphi(0)} - \frac{\varphi'(0)^2}{\varphi^2(0)} \right) + \dots = \\ &= ium_1 + \frac{(iu)^2}{2} (m_2 - m_1^2) + \dots = \\ &= ium_1 + \frac{(iu)^2}{2} \sigma^2 + \dots = ium_1 - \frac{u^2}{2} \sigma^2 + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Это разложение имеет то преимущество, что в него входит дисперсия σ .

Примеры

1. Непрерывное распределение Лапласа — Гаусса (нормальное распределение)

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp[-(x - \bar{x})^2/2\sigma^2], \quad \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 1. \quad (15)$$

Характеристическая функция такова:

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iux) \exp[-(x - \bar{x})^2/2\sigma^2] dx = \\ &= \exp(iu\bar{x}) \exp(-\sigma^2 u^2/2). \end{aligned} \quad (16)$$

Если взять за начало отсчета \bar{x} (т. е. центр тяжести распределения), то будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \exp(-\sigma^2 u^2/2) = 1 - \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \dots, \\ \Phi(u) &= -\frac{\sigma^2}{2} u^2, \end{aligned} \quad (17)$$

откуда $m_1 = 0$ (что вполне естественно!) и $m_2 = \sigma^2$. Таким образом, величина σ в выражении для $\rho(x)$ есть дисперсия, соответствующая этому распределению. Непрерывное распределение Лапласа — Гаусса — это фундаментальное распределение вероятностей, относящееся к множеству малых случайных изменений.

2. Дискретное распределение Пуассона

Дискретное распределение Пуассона, встречающееся в многочисленных приложениях теории вероятностей, выполняется для одной случайной величины X , которая может принимать только целые неотрицательные значения $0, 1, 2, \dots, n, \dots$, и имеет вид формулы

$$P(n) = e^{-\alpha} \alpha^n / n!$$

для вероятности появления числа $x = n$. Очевидно, что $\sum_n P_n = 1$, как это и должно быть.

В этом случае характеристическая функция равна

$$\varphi(u) = \sum_n e^{iun} e^{-\alpha} \frac{\alpha^n}{n!} = e^{-\alpha} \left[1 + q + \frac{q^2}{1} + \dots + \frac{q^n}{n!} + \dots \right],$$

где $q = e^{iu\alpha}$, т. е.

$$\varphi(u) = \exp[\alpha(e^{iu} - 1)]. \quad (18)$$

Разложение функции $\varphi(u)$ в ряд имеет вид

$$\varphi(u) = 1 + i\alpha u - \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2} u^2 + \dots, \quad (19)$$

откуда

$$m_1 = \alpha, \quad m_2 = \alpha(\alpha + 1). \quad (20)$$

Значения (20) легко получить, написав

$$m_1 = \bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha} \frac{\alpha^n}{n!} n = \alpha e^{-\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} = \alpha,$$

$$m_2 = \overline{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha} \frac{\alpha^n}{n!} n^2 = \alpha e^{-\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} n =$$

$$= \alpha e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (n+1), \quad (21)$$

$$m_2 = \alpha e^{-\alpha} (\alpha + 1) e^{\alpha} = \alpha(\alpha + 1).$$

Таким образом,

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2 = \alpha(\alpha + 1) - \alpha^2 = \alpha.$$

Эту формулу еще легче получить с помощью второй характеристической функции

$$\Phi(u) = \ln \varphi(u) = \alpha(e^{iu} - 1) = i\alpha u + \frac{(iu)^2}{2} \alpha + \dots$$

В этом случае среднее значение \bar{x} оказывается равным дисперсии (среднеквадратичному отклонению от этого среднего значения) и они оба равны параметру α функции распределения Пуассона.

3. Распределение Коши

Вторым часто используемым распределением является распределение Коши

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}.$$

Мы уже говорили, что все моменты этого распределения бесконечны. Характеристическую функцию

$$\varphi(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iux}}{1+x^2} dx \quad (22)$$

легко вычислить методом вычетов. Получим

$$\varphi(u) = e^{-|u|}. \quad (23)$$

Эта функция не является аналитической и не может быть разложена в ряд Маклорена в окрестности начала, чем и объясняется отсутствие моментов.

Очевидно, что таким же образом можно было бы изучить бесконечное множество других распределений вероятностей, но здесь в этом нет необходимости.

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим теперь две случайные величины X и Y и предположим (это важно для будущих приложений в волновой механике), что измерение одной из этих величин никак не влияет на значения другой и что возможно одновременное измерение этих двух величин. Тогда можно ввести функцию распределения $F(x, y)$, такую, что вероятность при одновременном измерении величин X и Y (или при двух отдельных измерениях X и Y в любом порядке) получить значения, не превышающие $X = x$ и $Y = y$, будет равна $F(x, y)$. Как и в пре-

дыдущем случае, необходимо положить

$$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0,$$

$$F(+\infty, +\infty) = 1.$$

Функция F должна всегда возрастать с увеличением x и y . Этот рост может быть скачкообразным или непрерывным. В плоскости переменных x, y функцию $F(x, y)$ можно рассматривать как сумму масс, распределенных по этой плоскости, взятых во всех точках, абсциссы которых меньше заданных значений x и y . Массы могут быть локализованы в отдельных точках и на отдельных линиях плоскости или распределены непрерывно в определенных областях плоскости. Если $F(x, y)$ — всюду непрерывная функция, то можно ввести плотность распределения $\rho(x, y)$, такую, что

$$F(x, y) = \int_0^x dx \int_0^y dy \rho(x, y), \quad (24)$$

и все величины можно будет выразить через $\rho(x, y)$. В случае же дискретного распределения точек или линий F на плоскости (x, y) используем интеграл Стильтеса

$$F(x, y) = \iint dF(x, y),$$

где величина $dF(x, y)$ равна $\rho(x, y) dx dy$ в случае непрерывного распределения и принимает конечные значения в точках или на линиях, где имеется скачок вероятности.

Моменты распределения вероятностей

Мы можем здесь по-прежнему ввести моменты, но с учетом специфики двух переменных. Можно написать

$$m_{x^k y^l} = \iiint_{-\infty}^{+\infty} x^k y^l dF(x, y), \quad (25)$$

где $m_{x^k y^0} = m_{x^k}$ и $m_{x^0 y^l} = m_{y^l}$.

В частности, $m_x = \bar{x}$, $m_y = \bar{y}$, $m_{x^2} = \overline{x^2}$, В случае непрерывного распределения имеем

$$m_{x^k y^l} = \iint_{-\infty}^{\infty} x^k y^l \rho(x, y) dx dy.$$

Характеристическая функция

Характеристическая функция может быть введена как естественное обобщение соответствующего определения в случае одной переменной, а именно

как

$$\varphi(u, v) = \iint e^{i(ux + vy)} dF(x, y), \quad (26)$$

что в случае непрерывного распределения приводит к выражению

$$\varphi(u, v) = \iint e^{i(ux + vy)} \rho(x, y) dx dy,$$

а в случае дискретного распределения — к выражению

$$\rho(u, v) = \sum_{n,m} P_{nm} \exp[i(ux_n + vy_m)],$$

где P_{nm} — вероятность обнаружения пары значений $X = x_n$, $Y = y_m$.

Здесь остаются справедливыми и формулы обратного преобразования. Так, например, в случае непрерывного распределения имеем

$$\rho(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-i(ux + vy)} \varphi(u, v) du dv \quad (27)$$

(формула обратного преобразования Фурье).

В общем случае

$$F(x, y) - F(x_0, y_0) = \lim_{U \rightarrow \infty} \lim_{V \rightarrow \infty} \int_{-U}^U \int_{-V}^V \frac{\exp(-iux_0) - \exp(-iux)}{iu} \times \\ \times \frac{\exp(-ivy_0) - \exp(-ivy)}{iv} \varphi(u, v) du dv. \quad (28)$$

Эти формулы показывают, что знание характеристической функции эквивалентно знанию функции распределения.

Как и в случае одной переменной, можно ввести моменты, если только они существуют, т. е. если сходятся соответствующие интегралы. Разложение функции $\varphi(u, v)$ в ряд Маклорена имеет вид

$$\varphi(u, v) = \varphi(0,0) + u\varphi'_u(0) + v\varphi'_v(0) + \\ + \frac{1}{2} [u^2\varphi''_{u^2}(0) + 2uv\varphi''_{uv}(0) + v^2\varphi''_{v^2}(0)] + \dots \quad (29)$$

В то же время по определению функции $\varphi(u, v)$ имеем

$$\varphi(u, v) = 1 + i(m_x u + m_y v) + \frac{i^2}{2} (m_{x^2} u^2 + 2m_{xy} uv + m_{y^2} v^2) + \dots \quad (30)$$

Сравнивая почленно эти два выражения, получаем

$$\begin{aligned} im_x &= \varphi_u'(0,0), & im_y &= \varphi_v'(0,0), \\ -m_{x^2} &= \varphi_{uu}''(0,0), & -m_{xy} &= \varphi_{uv}''(0,0), \dots, \end{aligned} \quad (31)$$

$$i^{k+l} m_{x^k y^l} = \frac{\partial^{k+l} \varphi}{\partial u^k \partial v^l} (0,0).$$

В этих формулах моменты выражаются через производные функции φ , и, следовательно, если моменты существуют, то их знание эквивалентно знанию функции $\varphi(u, v)$, т. е. знанию распределения вероятностей.

Можно, очевидно, ввести для переменных X и Y дисперсии

$$\sigma_x^2 = m_{x^2} - m_x^2, \quad \sigma_y^2 = m_{y^2} - m_y^2. \quad (32)$$

Введем вторую характеристическую функцию

$$\Phi(u, v) = \ln \varphi(u, v) = \ln \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(ux + vy)} dF(x, y). \quad (33)$$

Ее разложение в ряд Маклорена имеет вид

$$\Phi(u, v) = i(um_x + vm_y) + \frac{i^2}{2} (\sigma_x^2 u^2 + 2r\sigma_x\sigma_y uv + \sigma_y^2 v^2) + \dots, \quad (34)$$

где коэффициент $m_{xy} - m_x m_y$ при $2uv$ мы записали в виде $r\sigma_x\sigma_y$. Таким образом, мы фактически ввели «коэффициент корреляции» r :

$$r = \frac{m_{xy} - m_x m_y}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (35)$$

Мы видим, что этот коэффициент характеризует степень независимости переменных X и Y . Для среднего значения величины $[(x - \bar{x}) + \lambda(y - \bar{y})]^2$ находим $\sigma_x^2 + 2\lambda(x - \bar{x})(y - \bar{y}) + \lambda^2\sigma_y^2$, и, так как по определению эта величина должна быть, очевидно, неотрицательна, дискриминант $((x - \bar{x})(y - \bar{y}) - \sigma_x^2\sigma_y^2)$ предыдущего выражения по отношению к переменной λ должен быть меньше нуля или равен нулю. Отсюда

$$(x - \bar{x})(y - \bar{y}) = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y} = m_{xy} - m_x m_y = r\sigma_x\sigma_y, \quad (36)$$

т. е. $(r^2 - 1)\sigma_x^2\sigma_y^2 \leq 0$ и $|r| \leq 1$. Таким образом, коэффициент корреляции по абсолютной величине не может быть больше единицы.

Маргинальные и условные распределения вероятностей

Если нас интересуют только значения величины X , то можно ввести функцию распределения

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d_y F(x, y),$$

где интеграл берется по прямой, параллельной оси y , с абсциссой x . Точно так же, если интерес представляют только значения величины Y , то соответствующая функция распределения имеет вид

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} d_x F(x, y),$$

где интеграл берется по прямой, параллельной оси x , с ординатой y .

Функции $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ — это маргинальные функции распределения вероятностей. Соответствующие характеристические функции равны

$$\varphi_X(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} dF_X(x) = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{iux} dF(x, y) = \varphi(u, 0),$$

$$\varphi_Y(v) = \varphi(0, v).$$

В случае непрерывного совместного распределения, когда $dF(x, y) = \rho(x, y) dx dy$, вводятся маргинальные плотности распределения

$$\rho_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y) dy, \quad \rho_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y) dx.$$

В случае дискретного совместного распределения можно ввести маргинальные вероятности

$$P_X(x_n) = \sum_m P(x_n, y_m), \quad P_Y(y_m) = \sum_n P(x_n, y_m).$$

В случае независимых величин X и Y по теореме об умножении вероятностей (я предполагаю, что ее доказательство известно читателю) можно написать $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$, что в случае непрерывного совместного распределения приводит к формуле $\rho(x, y) = \rho_X(x)\rho_Y(y)$, а в случае дискретного — к формуле $P(x_n, y_m) = P_X(x_n)P_Y(y_m)$. Но в общем случае, когда величины X и Y не являются независимыми, по теореме об умножении вероятностей имеем

$$dF(x, y) = dF_X(x) dF_Y^{(X)}(x, y), \quad dF(x, y) = dF_Y(y) dF_X^{(Y)}(x, y).$$

Здесь $dF^{(X)}$ есть функция распределения вероятностей значений величины Y , соответствующих значению x величины X , а $dF_X^{(Y)}(x, y)$ — функция распределения вероятностей значений величины X , соответствующих значению y величины Y . Такие вероятности и такие распределения вероятностей называются условными.

В случае непрерывного совместного распределения вводятся условные плотности распределений $\rho_X^{(Y)}(x)$ и $\rho_Y^{(X)}(y)$, такие, что

$$\rho(x, y) = \rho_X(x)\rho_Y^{(X)}(x, y), \quad \rho(x, y) = \rho_Y(y)\rho_X^{(Y)}(x, y).$$

В случае дискретного совместного распределения можно ввести условные вероятности $P_X^{(Y)}(x_n)$ и $P_Y^{(X)}(y_m)$, такие, что

$$P(x_n, y_m) = P_X(x_n)P_Y^{(X)}(x_n, y_m),$$

$$P(x_n, y_m) = P_Y(y_m)P_X^{(Y)}(x_n, y_m).$$

Для условных распределений можно определить условные моменты и условные дисперсии. Например,

$$\begin{aligned} \overline{y^{(X)}} &= (m_1)_Y^{(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} y \rho_Y^{(X)}(x, y) dy = f(x), \\ (\sigma_Y^{(X)})^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (y - \overline{y^{(X)}})^2 \rho_Y^{(X)}(x, y) dy = g(x), \end{aligned} \quad (41)$$

и эти величины являются функциями x .

Функция $f(x)$ есть «регрессия» случайной величины Y на случайную величину X , а функция $g(x)$ — это условная дисперсия величины Y при $X = x$. Если g не зависит от x (дисперсия $\sigma_Y^{(X)}$ постоянна), то говорят, что корреляция «гомоседастическая». Аналогичные определения справедливы и для случайной величины X , коррелированной с Y .

Мы видим, что независимость, рассматриваемая с точки зрения теории вероятностей (стохастическая независимость), характеризуется формулами

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y), \quad \rho(x, y) = \rho_X(x)\rho_Y(y), \quad P(x_n, y_m) = P_X(x_n)P_Y(y_m). \quad (42)$$

Как нетрудно убедиться, в этом случае условные распределения совпадают с маргинальными распределениями: $F_X^{(Y)}(x) = F_X(x)$ и т. д. Характеристическая функция для двух стохастически независимых переменных равна произведению маргинальных характеристических функций, так как

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i(ux + vy)} dF(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} dF_X(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivy} dF_Y(y) = \\ &= \varphi(u, 0)\varphi(0, v) = \varphi_X(u)\varphi_Y(v). \end{aligned}$$

Обратно, если характеристическая функция равна произведению двух функций, каждая из которых зависит лишь от одной переменной, то эти случайные величины являются статистически независимыми. Это легко обнаруживается

при использовании формул обратного преобразования от характеристических функций к функциям распределения вероятностей.

Если случайные величины статистически независимы, то среднее значение m_{xy} величины xy , очевидно, равно произведению $m_x m_y$. В таком случае коэффициент корреляции, определяемый формулой $r = (m_{xy} - m_x m_y) / \sigma_x \sigma_y$, оказывается равным нулю. Таким образом, равенство нулю коэффициента корреляции — *необходимое* условие статистической независимости случайных величин. Но это условие нельзя считать *достаточным* — коэффициент корреляции может равняться нулю для случайных величин, которые и не являются статистически независимыми. В качестве примера рассмотрим две случайные величины X и Y , связанные строгим равенством $Y = X^2$. Чтобы описать эту связь, введем δ -функцию Дирака, такую, что $\delta(z) = 0$ всюду, кроме $z = 0$, и $\delta(z) = \infty$ в точке $z = 0$, причем

$$\int_{-a}^{+b} f(z) \delta(z) dz = f(0),$$

где a и b — произвольные положительные числа. Применение δ -функции Дирака трудно строго обосновать с математической точки зрения¹⁾, но ее практическое использование не приводит к каким-либо ошибкам. Итак, с помощью δ -функции Дирака мы можем записать плотность распределения в виде

$$\rho(x, y) = \delta(y - x^2) \rho(x), \text{ так что } \iint_{-\infty}^{\infty} \rho dx dy = 1,$$

поскольку

$$\rho_Y^{(X)}(x, y) = \delta(y - x^2),$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \rho(x) \delta(y - x^2) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 1.$$

Предположим, что $\rho(x)$ является четной функцией x . Тогда имеем

$$m_{xy} = \overline{xy} = \iint_{-\infty}^{\infty} xy \rho(x) \delta(y - x^2) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \rho(x) dx = 0, \quad (43)$$

$$m_x = \bar{x} = \iint_{-\infty}^{\infty} x \rho(x) \delta(y - x^2) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} x \rho(x) dx = 0, \quad (44)$$

$$m_y = \bar{y} = \iint_{-\infty}^{\infty} y \rho(x) \delta(y - x^2) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \rho(x) dx \neq 0. \quad (45)$$

¹⁾ Этот текст писался в то время, когда теория распределений только создавалась. Луи де Бройль, конечно, не мог ее учитывать, но позднее он сделал карандашом пометку: «Л. Шварц». — Ж.Л.

Следовательно, $m_{xy} - m_x m_y = 0$ и $r = 0$. Таким образом, если две случайные величины связаны равенством $Y = X^2$ и $\rho(x)$ является четной функцией x , то коэффициент корреляции r равен нулю, несмотря на абсолютно жесткую связь, существующую между случайными величинами Y и X^1 .

Пример. Распределение Гаусса для случая двух переменных

Мы знаем, что разложение второй характеристической функции $\Phi(u, v)$ в ряд Маклорена имеет вид

$$\Phi(u, v) = i(um_x + vm_y) + \frac{i^2}{2}(\sigma_x^2 u^2 + 2r\sigma_x\sigma_y uv + \sigma_y^2 v^2) + \dots, \quad (46)$$

где r — коэффициент корреляции. Совместим начало координат с центром вероятностного распределения, так что

$$\Phi(u, v) = -\frac{1}{2}(\sigma_x^2 u^2 + 2r\sigma_x\sigma_y uv + \sigma_y^2 v^2) + \dots$$

Простейший случай — когда все члены, порядок которых больше двух, равны нулю. Тогда функция Φ является однородной и будет полиномом второй степени по u и v .

По аналогии со случаем одной переменной, когда для распределения Гаусса функция $\Phi(u)$ имела вид $-(\sigma^2/2)u^2$, мы можем сказать, что в рассматриваемом случае мы имеем распределение Гаусса (нормальное распределение) для двух переменных. Таким образом,

$$\Phi(u, v) = -\frac{1}{2}(\sigma_x^2 u^2 + 2r\sigma_x\sigma_y uv + \sigma_y^2 v^2), \quad (47)$$

$$\varphi(u, v) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(\sigma_x^2 u^2 + 2r\sigma_x\sigma_y uv + \sigma_y^2 v^2)\right\}. \quad (48)$$

Формула обратного преобразования имеет вид

$$4\pi^2\rho(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi(u, v)\exp[-i(ux + vy)] du dv$$

и позволяет найти соответствующую плотность распределения. Путем простых вычислений с учетом равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$$

¹⁾ Таким образом, коэффициент корреляции двух случайных величин может равняться нулю, даже если они и не являются независимыми. Напротив, если коэффициент корреляции отличен от нуля, то две случайные величины не могут быть независимыми. — Л.Б.

можно найти выражение для ρ :

$$\rho(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y(1-r^2)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{x}{\sigma_X}\right)^2 - 2r \frac{x}{\sigma_X} \frac{y}{\sigma_Y} + \left(\frac{y}{\sigma_Y}\right)^2}{1-r^2} \right\}. \quad (49)$$

Отсюда легко получить формулы для условных плотностей распределений:

$$\rho_Y^{(X)}(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{\rho_X(x)} = \frac{\rho(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y) dy}, \quad \rho_X^{(Y)}(x, y) = \dots$$

Легко получаем

$$\rho_Y^{(X)}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y\sqrt{1-r^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{y}{\sigma_Y} - r \frac{x}{\sigma_X}\right)^2}{1-r^2} \right\}. \quad (50)$$

Если $r = 0$, то $\rho_Y^{(X)}(x, y)$ есть плотность распределения Гаусса для одной переменной y , а функция $\rho(x, y)$ принимает вид $\rho(x)\rho(y)$ и имеет место статистическая независимость случайных величин.

Условное среднее значение равно

$$\overline{y^{(X)}} = (m_1)_Y^{(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} y \rho_Y^{(X)}(y) dy. \quad (51)$$

Легко получаем

$$\overline{y^{(X)}} = f(x) = r\sigma_Y(x/\sigma_X). \quad (52)$$

В этом случае кривая регрессии представляет собой прямую линию. Аналогично

$$(\sigma_Y^{(X)})^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (y - \overline{y^{(X)}})^2 \rho_Y^{(X)}(y) dy = \sigma_Y^2(1-r^2),$$

$$\text{или } \sigma_Y^{(X)} = \sqrt{1-r^2}\sigma_Y = g(x).$$

Величина $g(x)$ есть константа, т. е. связь — гомоседатическая. Если $r = \pm 1$, то $\sigma_Y^{(X)} = \sigma_Y$.

Эти результаты¹⁾ показывают, что в данном случае равенство нулю коэф-

¹⁾ Их можно получить и без вычислений, заметив, что функция $\rho_Y^{(X)}(y)$ имеет вид функции распределения Гаусса с дисперсией, равной $\sigma_Y\sqrt{1-r^2}$. — Л.Б.

фициента корреляции приводит к статистической независимости случайных величин, но это относится к специфике распределения Гаусса.

Можно рассматривать распределения вероятностей и для большего числа случайных величин, обобщая полученные выше результаты. Здесь мы этого делать не будем.

3. ОЧЕНЬ ВАЖНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ ПО ПОВОДУ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В предыдущем разделе мы исходили из предположения о том, что для двух случайных величин существует некая функция распределения $F(x, y)$ или же (в случае непрерывного распределения) плотность распределения $\rho(x, y)$, и получили ряд следствий. Все эти выводы, взятые вместе, основаны на неявном предположении, что измерение одной из величин X и Y не меняет состояния, существовавшего до измерения, и что оно есть лишь констатация определенного значения случайной величины. Необходимо глубже проанализировать данный момент, поскольку он играет важную роль в волновой механике. Мы начнем наш анализ со случая непрерывного распределения, а обобщение на дискретный и на общий случай не представит труда.

Для конкретности предположим, что мы хотим установить корреляцию между ростом и окружностью груди человека. За случайную величину X примем рост, а за случайную величину Y — окружность груди и измерим эти две величины у очень большого числа лиц (например, призывников на медкомиссии). Тогда можно будет ввести плотность распределения вероятностей $\rho(x, y)$, такую, что совместная вероятность обнаружения роста в интервале от x до $x + dx$ и окружности груди в интервале от y до $y + dy$ будет равна

$$\rho(x, y) dx dy \quad (\text{причем, естественно, } \iint_{-\infty}^{\infty} \rho dx dy = 1).$$

Совершенно очевидно, что здесь измерение носит характер простой констатации, так как невозможно представить себе, чтобы операция измерения роста призывника могла изменить окружность груди или рост и окружность груди других призывников. Тогда функции

$$\rho_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y) dy, \quad \rho_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y) dx \quad (53)$$

будут плотностями распределений вероятностей обнаружения роста и окружности груди, рассматриваемых как независимые переменные. Формулами

$$\rho_X^{(Y)}(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{\rho_Y(y)}, \quad \rho_Y^{(X)}(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{\rho_X(x)} \quad (54)$$

будут определяться условные вероятности, смысл которых таков: вероятность обнаружить рост в интервале от x до $x + dx$ в группе призывников с

окружностью груди y равна $\rho_X^{(Y)}(x, y) dx$. Аналогично интерпретируется величина $\rho_Y^{(X)}(x, y)$.

Но предположим, хотя это и неправдоподобно, что измерение роста призывника приводит к изменению окружности его груди и наоборот. В этом случае полученные формулы теряют силу. Одновременное измерение X и Y станет невозможным по той причине, что одна из величин изменяется при измерении другой. Очевидно, что можно провести последовательное измерение двух величин, но тогда становится весьма существенным порядок измерения. Можно было бы, измерив только X , определить плотность распределения $\rho_X(x)$ и, измерив только Y , определить $\rho_Y(y)$. Но если после измерения случайной величины X будет измерена величина Y , то мы придем к плотности распределения

$$\rho_Y'(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_X(x) \rho_Y^{(X)}(x, y) dx, \quad (55)$$

где $\rho_Y^{(X)}(y, x)$ — плотность распределения вероятностей значений случайной величины Y для группы призывников, у которых нашли $X = x$ при первом измерении. В теоремах о полных вероятностях и вероятностях сложных событий содержится полученная формула, но нет никакой гарантии, что функция $\rho_Y'(y)$ окажется равной $\rho_Y(y)$. Также нет причин для равенства распределения вероятностей Y после измерения X распределению вероятностей Y , соответствующему прямому измерению этой случайной величины, поскольку измерение величины X уже не является простой констатацией его значения, но приводит к возмущению вероятностных состояний. То же самое можно сказать об измерении сначала Y , а затем X . Вероятность получить значение x величины X в этом случае будет определяться по формуле

$$\rho_X'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_Y(y) \rho_X^{(Y)}(x, y) dy,$$

являющейся следствием общих теорем теории вероятностей. Здесь $\rho_X^{(Y)}(x, y)$ — плотность распределения вероятностей значений x роста в группе призывников, для которых при первом измерении было получено значение окружности груди $Y = y$. Нет никаких причин, по которым должны были бы равняться друг другу величины $\rho_X'(x)$ и $\rho_X(x)$.

Может ли в таком случае существовать функция $\rho(x, y)$? Во всяком случае эта функция уже не может иметь того смысла, что *одновременное* измерение величин X и Y даст с вероятностью $\rho(x, y) dx dy$ значение X в интервале от x до $x + dx$ и значение Y в интервале от y до $y + dy$, так как одновременное измерение величин X и Y невозможно. Правда, ничто не мешает существованию такой функции $\rho(x, y)$, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y) dx = \rho_Y(y), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y) dy = \rho_X(x), \quad (56)$$

где $\rho_Y(y)$ и $\rho_X(x)$ — плотности распределений вероятностей, соответствующие

прямым измерениям случайных величин X и Y . Однако плотность распределения $\rho'_Y(y)$ для измерения Y после измерения X и плотность распределения $\rho'_X(x)$ для измерения X после измерения Y будут отличны от плотностей $\rho_Y(y)$ и $\rho_X(x)$. Вероятности $\rho_Y^{(X)}(x, y)$ и $\rho_X^{(Y)}(x, y)$, входящие в выражения для $\rho'_Y(y)$ и $\rho'_X(x)$, не будут больше равны $\rho(x, y)/\rho_X(x)$ и $\rho(x, y)/\rho_Y(y)$, так как в противном случае мы получили бы соотношения

$$\rho_X(x) = \rho'_X(x), \quad \rho_Y(y) = \rho'_Y(y), \quad (57)$$

которые теперь не обязаны выполняться, ибо измерения величин X и Y не сводятся больше к простой констатации значений случайных величин, а приводят к возмущениям вероятностных состояний. Из всего этого следует, что в данном случае, даже если можно найти функцию $\rho(x, y)$, такую, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho dx = \rho_Y(y), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \rho dy = \rho_X(x),$$

то эта функция не будет больше иметь того вполне определенного смысла, который она имела в предыдущих наших рассуждениях, и, в частности, она не даст возможности вычислять функции $\rho_X^{(Y)}(x, y)$, $\rho_Y^{(X)}(x, y)$, $\rho'_X(x)$, $\rho'_Y(y)$.

Но нас могут спросить, какой смысл рассматривать столь странный случай, в котором измерение роста призывника приводило бы к изменению окружности его груди? В обычной нашей практике, т. е. во всех вероятностных задачах на макроскопическом уровне, такой случай, по-видимому, не встречается. Приведем другой пример из классической области — когда в двух ящиках имеется определенное число золотых и серебряных монет. Гипотеза, о которой идет речь, означала бы, что открывание одного из ящиков меняет распределение монет между обоими ящиками, и это тоже трудно себе представить. Но то, что кажется странным с точки зрения макроскопической физики (в которой обычно пользуются математической статистикой), становится правилом в микрофизике, когда величины X и Y являются канонически сопряженными (некоммутирующими) и когда уже нельзя в своих рассуждениях вводить функцию $\rho(x, y)$, молчаливо предполагая, что измерение есть лишь простая констатация¹⁾.

¹⁾ Автор повторяет здесь анализ, опубликованный ранее в статье «Статистика чистых состояний» [V, 44; III, 9]. Именно в ходе такого анализа он пришел к мысли, исключительно важной для теорий со скрытыми параметрами, о том, что статистические распределения таких параметров (которые непременно должны подчиняться законам классической статистики) сами должны быть скрытыми и не могут совпадать со статистическими распределениями результатов измерений, вычисляемыми в квантовой механике. Мы обнаружим эту идею в зачаточной форме в данной книге в конце примечания по поводу теоремы фон Неймана. На это будет обращено внимание читателя в соответствующем месте. Позднее автор широко разработал эту идею в своей книге «Теория измерений» [II, 27, 33]. — Ж.Л.

Глава XII

Обзор основных представлений волновой механики¹⁾

Волновая механика исходит из представления о том, что с каждой *частицей* можно мысленно связать волну, математически описываемую некоторой функцией $\psi(x, y, z, t)$; другими словами, она связывает понятие частицы с понятием «поля», принятым в теории поля (поле ψ).

Функция ψ должна удовлетворять некоему волновому уравнению, которым в каком-то смысле должно заменяться уравнение классической механики. Здесь мы будем иметь дело лишь с нерелятивистской формой волновой механики; обобщение всего изложенного на релятивистский случай можно будет осуществить на базе теории Дирака и аналогичных теорий для частиц со спином, большим $\frac{1}{2}$. Этих вопросов мы пока касаться не будем.

Рассмотрим частицу с массой m , движущуюся в *словом* поле, определяемом заданием потенциальной энергии $U(x, y, z, t)$. Пусть \mathbf{p} — импульс частицы, а E — ее энергия, определяемая как сумма кинетической и потенциальной

¹⁾ Автор, несомненно, переписал бы эту главу, в которой во многих местах повторяется то, что уже излагалось в первой части книги, ибо данная глава соответствует лекциям, не прочитанным в том же году. Мы позволили себе опустить некоторые места такого рода: с. 34 — 42 рукописи, где повторяется соответствующий раздел главы «Общий формализм волновой механики», с. 42 — 47, где повторяется часть главы «Общие принципы вероятностной интерпретации», с. 48, 49, где речь идет о соотношениях неопределенностей, с. 50 — 59, где повторяется раздел «Алгебраические матрицы и их свойства», с. 60 — 64, где обсуждаются «Точная форма соотношений неопределенностей» и операторы «Углового момента». Мы почти полностью опустили с. 65 — 70, где повторяется изложение «Волновой механики системы частиц», но оставили замечание о конфигурационном пространстве (с. 69 рукописи), которое приводим далее в этой книге в виде примечания с указанием источника; наконец, на с. 78 и 79 снова рассматривалась проблема коммутруемости операторов, которая уже была рассмотрена выше. То, что мы оставили из данной главы, не совсем свободно от повторений, но этот материал служит дополнением к первой части книги и, кроме того, позволяет проследить эволюцию взглядов автора за время, истекшее после написания первой части. — *Прим. издателей* (С. Динера, Д. Фарга, Ж. Лошака).

энергий:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x, y, z, t) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z, t). \quad (1)$$

Как известно, функцией Гамильтона называется полная энергия, представленная в виде функции $H(x, y, z, p_x, p_y, p_z, t)$ координат, импульсов и времени. В данном случае

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z, t) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z, t). \quad (2)$$

Развитие волновой механики показало, что волновое уравнение для волн ψ можно получить, исходя из функции Гамильтона, следующим образом. Сначала заменим в выражении для H каждый из импульсов p_q оператором $-(h/2\pi i)\partial/\partial q$, а каждую из координат q — оператором $q \times$, что даст нам оператор

$$H_{\text{опер}} \left(x, y, z, t, -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}, -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y}, -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

называемый оператором Гамильтона или просто гамильтонианом. Затем напишем уравнение

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = H_{\text{опер}} \psi,$$

где ψ — волновая функция, и тем самым мы получим волновое уравнение для рассматриваемой частицы.

Можно придать этому уравнению более конкретную форму; учитывая, что

$$H_{\text{опер}} = -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + U(x, y, z, t), \quad (3)$$

получаем волновое уравнение

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \Delta \psi + U\psi, \text{ или } \Delta \psi - \frac{8\pi^2 m}{h^2} U\psi = \frac{4\pi i m}{h} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (4)$$

Это уравнение в частных производных, являющееся уравнением первого порядка по отношению к времени, в принципе дает возможность находить вид волновой функции $\psi(x, y, z, t)$ в момент t , если известен ее вид в начальный момент времени t_0 .

Полученное волновое уравнение — это уравнение с комплексными коэффициентами; поэтому ψ — принципиально комплексная функция и не может описывать колебания реальной среды так, как их описывают по предположению волновые функции в классической физике.

Будем через F^* обозначать величину, комплексно сопряженную по отношению к F . Для функции ψ^* имеем уравнение

$$\Delta\psi^* - \frac{8\pi^2m}{h^2} U\psi^* = - \frac{4\pi im}{h} \frac{\partial\psi^*}{\partial t}, \quad (5)$$

комплексно сопряженное по отношению к уравнению для ψ .

Примем в виде определения

$$\rho = \psi\psi^* = |\psi|^2, \quad \mathbf{f} = -\frac{h}{4\pi im} (\psi^* \text{grad } \psi - \psi \text{ grad } \psi^*).$$

Очевидно, что это действительные величины (поскольку $\mathbf{f}^* = \mathbf{f}$). Из уравнений для ψ и ψ^* получим

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{f} = 0. \quad (6)$$

Данное уравнение имеет вид классического уравнения непрерывности для жидкости, плотность которой в каждой точке равна ρ , а поток $\rho\mathbf{v}$ равен \mathbf{f} . Уравнение выражает обстоятельство, что с течением времени количество жидкости сохраняется: интеграл

$$\int_D \rho \, d\tau = \int_D |\psi|^2 \, d\tau,$$

где D — конечная или бесконечная область, занимаемая волной ψ , не меняется с течением времени. Функция ψ , будучи решением *линейного* уравнения, определяется лишь с точностью до постоянного множителя; мы можем выбрать этот множитель таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\int_D |\psi|^2 \, d\tau = 1. \quad (7)$$

В этом случае говорят, что функция ψ «нормирована», и мы будем предполагать, что все такие функции должны быть нормированы; этого требует физический смысл, приписываемый далее величине $|\psi|^2$. Заметим, что, будучи нормированной, функция ψ содержит еще произвольный множитель $\exp\{i\alpha\}$, по модулю равный единице.

Можно показать, что в приближении геометрической оптики волновая механика переходит в классическую механику как свое первое приближение. Несмотря на важное значение данного вопроса, мы на нем здесь подробнее не останавливаемся, поскольку детально рассматривали его в других работах.

Очень важное значение имеет частный случай, когда функция U не зависит от времени (постоянное поле). В этом случае волновое уравнение для ψ допускает «монокроматические» решения, в которых время содержится лишь экспоненциальным множителем вида $\exp\{2\pi i/hEt\}$. Подобного рода монокроматическое решение удовлетворяет уравнению

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}[E - U(x, y, z)]\psi = 0. \quad (8)$$

В случае когда $U \equiv 0$ (отсутствие поля), в качестве решения волнового уравнения получим «плоские монокроматические волны»

$$\psi(x, y, z, t) = A \exp\left(\frac{2\pi i}{h}[Et - \sqrt{2mE}(\alpha x + \beta y + \gamma z)]\right), \quad (9)$$

где A — комплексная постоянная, а α, β, γ — направляющие косинусы направления распространения ($\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$). Это решение представляет собой плоскую волну с частотой $\nu = E/h$ и длиной волны

$$\lambda = h/\sqrt{2mE} = h/p = h/mv,$$

распространяющуюся в направлении с направляющими косинусами α, β, γ . Рассмотрение волн ψ подобного типа привело к возникновению волновой механики; такая волна соответствует равномерному и прямолинейному движению частицы с массой m , энергией E и импульсом p в отсутствие поля.

1. ПРИНЦИП ИНТЕРФЕРЕНЦИИ. ТЕОРИЯ ВОЛНЫ-ПИЛОТА

В самом начале развития волновой механики теоретики пришли к необходимости рассматривать величину $\psi\psi^* = |\psi|^2$ как вероятность присутствия частицы в данной точке. Этот принцип, носящий название принципа интерференции или принципа локализации, есть не что иное, как обобщение на волновую механику того принципа, который всегда применяется в волновых теориях света: в этих теориях всегда считается, что плотность энергии в каждой точке дается интенсивностью волны в этой точке, а интенсивность по определению равна квадрату амплитуды волны. Но, как нетрудно сообразить, в случае плоской монокроматической волны и в случае суперпозиции плоских волн одинаковой частоты величина $|\psi|^2$ в точности равна интенсивности. Если считать, что свет состоит из фотонов, то тогда в световой волне плотность (числа) фотонов в каждой точке пространства должна быть пропорциональна величине $|\psi|^2$, где ψ — переменная волновая функция для света, записанная в комплексной форме, и мы видим, что принцип интерференции волновой механики есть не что иное, как прямое обобщение на случай любых частиц (например, электронов) принципа, который справедлив для световых фотонов.

Явления дифракции частиц (дифракция электронов на кристалле, Дэвиссон и Джермер [11]; дифракция протонов и других частиц на кристалле, Штерн,

Эстерман [27]; дифракция электронов на крае экрана, Берш [15]; дифракция нейтронов, Амальди и др., 1945 — 1947, . . .) могут быть объяснены лишь на основе принципа интерференции, в чем можно видеть опытное доказательство данного принципа¹⁾.

Но речь идет не только об этом. Выше мы рассуждали, предполагая, что имеем дело с волной (световой или с волной ψ), с которой связано большое число частиц, таких, как фотоны или частицы с конечной массой. Это дает возможность говорить о плотности числа таких частиц. Но очень важные опыты Тейлора [31] и Демпстера и Бато [32] показывают, что картина интерференции света всегда одинакова независимо от того, будет ли очень слабый свет действовать в течение очень долгого времени или сильный свет в течение короткого промежутка времени. Хотя аналогичного рода опыты с электронами или другими частицами конечной массы еще не проводились, они, несомненно, приведут к такому же результату²⁾. В подобного рода опытах фотоны приходят в интерференционный прибор лишь по одному и каждый из фотонов следует считать соответствующим некоему цугу световых волн. Таким образом, здесь уже нельзя говорить о плотности (числа) фотонов, соответствующих падающей волне, и, чтобы сохранить принцип интерференции и основанную на нем интерпретацию, приходится принять, что в волновом пакете, соответствующем фотону, величина $|\psi|^2$ пропорциональна вероятности того, что фотон обнаружит свое присутствие в данной точке, локально воздействуя на вещество.

Итак, данные опытов, подобных опытам Тейлора, вынуждают нас в виде обобщения допустить, что с каждой частицей связан протяженный волновой пакет и что величина $|\psi|^2$ дает вероятность обнаружения на опыте частицы в рассматриваемой точке пространства. Поскольку волновой пакет в общем случае занимает определенную область пространства, а величина $|\psi|^2$, вообще говоря, отличается от нуля во всей области, занимаемой волновым пакетом в заданный момент времени, можно сделать вывод, что положение частицы в волновом пакете априори является в какой-то мере неопределенным и что можно приписать лишь некоторую вероятность каждому из возможных положений.

Но тогда возникает вопрос, имеющий большое познавательное и общепhilosophическое значение: является ли такое отсутствие детерминированности лишь кажущимся, обусловленным лишь тем, что мы не знаем истинной траектории частицы, или же, напротив, оно связано с реальной неопределенностью, с тем, что частица, так сказать, приобретает положение в пространстве лишь в тот момент, когда она в результате взаимодействия проявляет свое присут-

¹⁾ Добавим также работы более позднего времени [28, 29]. С данным вопросом можно ознакомиться также по коллективной монографии [30]. — Ж. Л.

²⁾ На самом деле незадолго до того Биберман, Сушкин и Фабрикант [33] провели опыт, в котором был получен результат, предсказанный Луи де Бройлем. — Ж. Л.

вие в виде наблюдаемого явления? Первый взгляд на вещи соответствует представлениям классической физики, в которой вероятность вводится лишь как следствие того, что мы не знаем точной детерминированности данного явления. В противоположность этому вторая точка зрения, предполагающая ограниченную детерминированность явления, быстро распространилась среди специалистов по квантовой физике и, по-видимому, сейчас хорошо обоснована¹⁾.

В период 1926 — 1927 гг., когда дискутировался этот важный вопрос, было естественно попытаться сохранить классические представления, приписав частицам такие траектории, для которых плотность «вероятности присутствия» характеризовалась бы величиной $|\psi|^2$. Попытка подобного рода, намеченная Маделунг и носящая название гидродинамической теории волновой механики, была в этот период продолжена мною под названием «теории волны-пилота»²⁾.

Мы видели, что волне $\psi = a \exp[i\varphi]$ можно сопоставить фиктивную жидкость с плотностью $\rho = |\psi|^2$ и плотностью потока

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{v} = - \frac{\hbar}{4\pi i m} (\psi^* \text{grad } \psi - \psi \text{ grad } \psi^*)$$

и что для такой фиктивной жидкости выполняется закон сохранения. Траектории молекул этой фиктивной жидкости можно, как это принято в гидродинамике, записать в виде уравнения

$$\mathbf{v} = - \frac{\hbar}{4\pi i m |\psi|^2} (\psi^* \text{grad } \psi - \psi \text{ grad } \psi^*) = - \frac{\hbar}{2\pi m} \text{grad } \varphi. \quad (10)$$

для скорости в каждой точке. В случае монохроматической (не обязательно плоской) волны, соответствующей постоянному полю, мы имеем $\psi \sim \exp(2\pi i E t / \hbar)$ и \mathbf{v} не зависит от времени. В этом случае траектории молекул жидкости совпадают с линиями тока (т. е. с линиями, в каждой точке которых в заданный момент времени касательной является локальный вектор скорости \mathbf{v}), что соответствует хорошо известному в гидродинамике результату. Но тогда заманчиво было бы допустить, что если с волной ψ связано большое число частиц, то эти частицы описывают гидродинамические траектории, уравнение которых мы только что нашли. Мы сразу же получили бы, что $|\psi|^2$ есть плотность (числа) частиц в волне и что соотношение

$$\int |\psi|^2 d\tau = \text{const}$$

¹⁾ Позднее автор поставил на полях в данном месте знак вопроса. — Ж. Л.

²⁾ Позднее после слова «волны-пилота» автор вписал карандашом «развить. Гипотеза двойного решения». — Ж. Л.

выражает закон сохранения числа частиц в процессе распространения волны¹⁾.

Но мы знаем, что мы должны иметь возможность связать с каждой частицей отдельный волновой пакет. Тогда для волнового пакета можно будет определить бесконечное число гидродинамических траекторий, но так как по предположению в волне имеется только одна частица, то последняя фактически опишет лишь одну из траекторий, а другие останутся виртуальными. Как нетрудно видеть, величина $|\psi|^2$ при этом не теряет полностью смысла. Очевидно, что она уже не будет характеризовать локальную плотность (числа) частиц, но если мы совершенно не знаем описываемую частицей траекторию, то, как нетрудно сообразить, в каждый момент времени величина $\rho dt = |\psi|^2$ будет пропорциональна вероятности найти частицу в рассматриваемый момент времени в элементе объема dt . Это интерпретация классического типа, поскольку она основана на предположении, что частица действительно имеет траекторию и что вероятность приходится вводить лишь постольку, поскольку мы не знаем этой траектории, так что, если в момент времени t мы обнаруживаем частицу в точке P пространства, это происходит по той причине, что действительно в этот момент она пришла по своей траектории в точку P .

При этом можно сказать, что волна управляет движением частицы, так как это движение, по предположению совершенно детерминированное, определяется по известной волне ψ . Отсюда и возникло данное мною название «теория волны-пилота»²⁾.

К сожалению, эта теория, хотя на первый взгляд и представляется весьма привлекательной, при детальном рассмотрении наталкивается на непреодолимые трудности³⁾. Прежде всего она на самом деле значительно менее класси-

¹⁾ При движении частицы на нее действовал бы не только внешний потенциал $V(x, y, z, t)$, но и «квантовый потенциал», равный $-(\hbar^2/8\pi^2m)(\square a/a)$, характеризующий своего рода реакцию волны на частицу. — Л. Б.

²⁾ От «piloter» (франц.) — вести, указывать путь. — *Прим. ред.*

³⁾ Здесь интересно проследить «последовательные слои» мысли автора. В самом деле, прежде всего сам факт упоминания волны-пилота, хотя бы даже критического — уже нечто новое по сравнению с первой частью данной работы (написанной за год до этого), где не было даже намека на попытки автора в 1926 — 1927 гг. «сохранить классические представления», как об этом говорилось несколько выше. Кроме того, появились примечания или существенные исправления, сделанные *другими чернилами*. Сюда относится введение фазы волны в скорость жидкости Маделунг, где автор возвращается к обозначениям теории волны-пилота; сюда относится также короткое примечание о квантовом потенциале. И здесь в строке, к которой относится данное примечание, автор зачеркнул слово «непреодолимые» и написал «которые в настоящее время кажутся мне непреодолимыми» (учитывая точность стиля де Бройля, это важный нюанс). Но нужно отметить, что он говорит пока еще только о теории волны-пилота, которую он позднее охарактеризует как «урезанный, вырожденный вариант теории двойного решения» [II, 26, с. 107]; «теория немного половинчатая», — скажет он в другом месте. Помня о своей неудаче на Сольвеевском конгрессе 1927 г., он, видимо, еще соединяет с ней обе теории и не говорит о двойном решении; но он упоминает о нем после другого прочтения в карандашных пометках: это следующий этап развития его мысли. — Ж. Л.

ческая, чем это может показаться, поскольку движение частицы описывается функцией $\psi(x, y, z, t)$, которая вычисляется по начальной форме $\psi(x, y, z, t_0)$ на основе волнового уравнения. При этом величина $|\psi(x, y, z, t_0)|^2$ характеризует вероятность присутствия частицы в точке x, y, z в начальный момент t_0 . Таким образом, движение частицы в момент t должно зависеть не только от ее положения и скорости в момент t_0 , как это имеет место в классической механике, но еще и от вероятности, которую она имела в момент t_0 , оказаться в какой-либо точке x, y, z . Такая странная ситуация полностью противоречит классическим представлениям!

В более общем случае движение частицы должно будет зависеть от глобального выражения для волны ψ , которое определяется всеми случайностями, встречающимися на ее пути в пространстве. Возьмем, например, опыт Юнга. В теории волны-пилота фотон, имея определенную траекторию, пройдет через одно из отверстий в экране, но при выходе из отверстия на его движение повлияет наличие второго отверстия, поскольку форма волны ψ за экраном симметрично зависит от существования двух отверстий. Таким образом, мы приходим к парадоксальным выводам, весьма далеким от классических представлений¹⁾. К тому же фактическое построение гидродинамических траекторий, по-прежнему возможное, может дать, например, в случае интерференции вблизи зеркала (опыт Винера) очень сложные и неправдоподобные траектории частицы со скоростью, иногда превышающей скорость света²⁾.

Однако имеются и еще более серьезные возражения, препятствующие³⁾ принятию теории волны-пилота. Далее мы увидим, что развитие волновой механики приводит к принципу обобщенного спектрального разложения (частным случаем которого является принцип интерференции), который необходим для интерпретации всей совокупности квантовых явлений. Указанный принцип приводит к необходимости приписать всем связанным с частицами величинам (а не только ее координатам) ряд возможных значений с соответствующими вероятностями. Другими словами, каждой величине ставится в соответствие некая функция распределения (вероятностей), зависящая от функции ψ . В частности, это относится и к составляющим импульса, и отсюда можно сделать вывод, что в любой момент времени имеются неопределенности в значении координаты x и в значении соответствующей составляющей импульса p_x , такие, что $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h$ (соотношение неопределенностей Гейзенберга). Этот вывод, который непротиворечивость новой механики и ее экспериментальные

¹⁾ В теории двойного решения этот недостаток становится преимуществом: движение сингулярности волны, определяемое граничными условиями, превосходно описывает дифракцию и интерференцию. — Ж. Л.

²⁾ Данная трудность сохраняется и в теории двойного решения; см. анализ в работе [II, 26]. — Ж. Л.

³⁾ Теми же чернилами, что и в предыдущих поправках, автор позднее зачеркнул слова «еще» и «препятствующие», заменив второе из них словами «по-видимому, препятствующие». — Ж. Л.

подтверждения делают несомненным, никак не согласуется с теорией волны-пилота. В частности, последняя приводит к вполне определенному значению для импульса и не позволяет получить соотношения неопределенностей¹⁾.

Добавим еще, что обобщение теории волны-пилота на случай волновой механики систем частиц приводит к другим трудностям, которые представляются непреодолимыми.

Тщательное изучение этих трудностей в 1927 — 1928 гг. привело меня к тому, что я полностью отказался от теории волны-пилота и присоединился к новой точке зрения Бора и Гейзенберга, в которой отвергаются любые представления о траектории элементарных частиц и о детерминированности их движения. После моих тогдашних попыток сохранить старые представления у меня сложилось впечатление, что и любые другие попытки достижения этой цели натолкнутся на те же самые трудности. Если я изложил здесь эту свою старую точку зрения, то лишь потому, что те же самые трудности действительно возникли при более новых попытках. Так, в теории Боме, о которой я скажу ниже, мы снова находим формулы теории волны-пилота и те трудности, к которым они приводят²⁾.

¹⁾ Совершенно неверно! Данное возражение говорит о том, что Луи де Бройль, отошедший от своих старых представлений, еще не размышлял над проблемой измерения в причинной теории, чем он займется вскоре под влиянием работы Боме. Тогда он покажет, что не следует смешивать *скрытые* значения величины, например импульса, с ее *измеренными* значениями. Последние — это те значения, которые получают после того, как разложат начальный волновой пакет на целый ряд отдельных волновых пакетов, каждый из которых соответствует вполне определенному значению импульса. При этом измерение заключается в приписывании импульсу значения, соответствующего тому волновому пакету, в котором будет зарегистрировано наличие частицы. Как нетрудно видеть, в результате изменяются возможные значения импульса (вследствие разложения начальной волны), а также появляется элемент случайности, обусловленный тем, что частица может попасть в тот или иной волновой пакет, отвечающий разложению начальной волны. Два этих обстоятельства приводят к соотношениям Гейзенберга, но интерпретация последних отличается от обычной интерпретации [II, 27, 29, 33] — Ж. Л.

²⁾ В своей недавно опубликованной работе «Возможная новая интерпретация квантовой теории» (1951 г.) Бом в Принстоне в точности повторил мою старую теорию волны-пилота. Действительно новое в работе Боме, как мне представляется, лишь то, что он проанализировал процесс измерения более детально, чем я в своих публикациях двадцатипятилетней давности.

Теория Боме естественным образом наталкивается на те же трудности, что и моя, и они по-прежнему представляются мне непреодолимыми. Как замечает Бом, данная теория имеет смысл (в частности, в том, что касается введения квантового потенциала) лишь в том случае, если волна является «физической реальностью». Но это, на мой взгляд, допустить невозможно. В самом деле, во-первых, волна ψ представляется принципиально комплексной функцией и в общем случае распространяется в явно абстрактном и фиктивном конфигурационном пространстве; уже одно это не позволяет рассматривать ее в качестве физической реальности в том смысле слова, в каком оно понимается в классической физике. Во-вторых, любое измерение координат резко уменьшает пространственную протяженность волны ψ и меняет ее форму (редукция волнового па-

кета), так что измерения, проведенные в некоторой области пространства, полностью меняют вид волны ψ в удаленных областях, а это, по-видимому, тоже не позволяет приписывать волне ψ характер физической реальности.

Бом считает, что теория волны-пилота полностью устраняет трудности, указанные Эйнштейном, Подольским и Розеном. Я в этом не уверен, поскольку после столкновения волна ψ представляется целым рядом волновых пакетов, разделенных в конфигурационном пространстве, и при определении присутствия частицы в одном из этих волновых пакетов другие волновые пакеты исчезают. Здесь отпадают трудности, связанные с корпускулярными свойствами частиц, которые в теории волны-пилота имеют определенную траекторию и корреляция движения которых объясняется столь же естественно, как и в классической теории. Но зато возникают трудности с волной ψ , поскольку здесь она является физической реальностью и становится уже невозможным понятие, каким образом измерения, проведенные в одной из областей пространства, могут изменить эту физическую реальность в другой области пространства. Короче говоря, трудности переносятся с частицы на волну. — Л. Б.

Вряд ли нужно подчеркивать важное значение данного примечания, где автор говорит, что он только что прочитал эту работу Боме, которая вскоре приведет к пересмотру его собственных взглядов. Правда, его первая реакция отрицательна, и он подтвердит это публично в своей заметке в Докладах Академии наук Франции [I, 93; II, 26, с. 65], но следует особо подчеркнуть, что по существу он критикует теорию волны-пилота, а не теорию двойного решения, о которой он в это время вообще не думает. Вскоре после этого его внимание к последней теории снова привлечет Вижье, что проглядывает из пометки, сделанной позднее карандашом в конце его примечания: «Вижье и двойное решение».

Вся критика Луи де Бройлем теории волны-пилота направлена против субъективно-го характера волны ψ , которой данная теория, возрожденная Бомом, пытается придать прямой физический смысл. То обстоятельство, что волна является комплексной, имеет лишь второстепенное значение, поскольку это не мешает ей определять амплитуду и фазу. В противоположность этому аргумент о конфигурационном пространстве представляется более серьезным, и его одного было бы достаточно, чтобы отвергнуть теорию волны-пилота в качестве причинной теории, если бы для этого не было еще более серьезного основания — очевидного субъективного характера, придаваемого волне ψ редуцирующей пакета вероятностей в результате измерения. Именно по этой причине, как только де Бройль вернулся к своим исследованиям возможности причинной интерпретации волновой механики, он полностью отказался от теории волны-пилота и сосредоточился на теории двойного решения, в которой вводятся две волны, одна — обычная волна ψ , а другая — ненормированная и не испытывающая редукиции волнового пакета при измерении, а потому фактически способная играть роль физической волны. К сожалению, теория двойного решения сама по себе не снимает трудностей, связанных с использованием конфигурационного пространства. Начиная с 1926 — 1927 гг. [I, 29, 34; II, 25] де Бройль пытался построить теорию систем частиц в физическом пространстве и принял теорию Шредингера в конфигурационном пространстве лишь за неимением ничего лучшего. Позднее, в период между 1952 и 1960 г., он снова предпринял в этом направлении большие усилия, работая в сотрудничестве с Андраде э Сильвой, для которого данная проблема послужила темой диссертации [II, 26, 27, 29] (см. также диссертацию Андраде э Сильвы). Несмотря на бесспорные успехи, все же пока еще нельзя говорить о завершенной теории, которая могла бы заменить обычную теорию. В частности, остается неразрешенным парадокс Эйнштейна — Подольского — Розена. Чтобы пояснить настроение де Бройля в 1951 г., мы здесь приведем замечание, сделанное им в разделе о системах частиц, который мы опустили, как говорилось выше, поскольку в нем повторяется изложенное в первой части книги:

«В классической механике точка, изображающая систему, с течением времени описывает вполне определенную траекторию в конфигурационном пространстве, и это соответствует тому, что частицы системы предполагаются всегда полностью локализованными в пространстве. Чтобы сохранить такое представление и не отказываться от классической детерминированной картины, здесь можно попытаться построить еще одну теорию волны-пилота, в которой волна ψ , распространяющаяся в конфигурационном пространстве, управляла бы движением изображающей точки в этом пространстве. Для этого нужно принять, что изображающая точка движется по гидродинамической траектории, определяемой в конфигурационном пространстве заданием $3N$ компонент скоростей $v_{x_k}, v_{y_k}, v_{z_k}$, введенных выше. Однако построенная таким путем теория оказывается еще более фиктивной и наталкивается на еще большие трудности, чем те, которые возникают в случае одной частицы. Приходится отказаться от нее и принять общую вероятностную интерпретацию, аналогичную той, которая была рассмотрена выше в случае одной частицы.»

Заметим, что последующее исправление, сделанное теми же чернилами, что и несколько предыдущих поправок, несколько ослабляет последнее высказывание заменой слова «приходится» словом «пришлось». — Ж. Л.

Глава XIII

Введение характеристической функции в вероятностном формализме волновой механики

Понятие характеристической функции ввел в вероятностный формализм волновой механики Арнус (1944 г.), в чем его очень большая заслуга. Эта функция приводит к изящным выражениям, и ее применение лежит в основе новых методов теоретического анализа некоторых проблем, как это, в частности, показал Арнус в своей диссертации (1946) [34].

1. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ В СЛУЧАЕ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Арнус обратил внимание на то, что распределение вероятностей, соответствующее физической величине A для состояния системы, описываемого волновой функцией $\psi(q, t)$ (где через q обозначена совокупность переменных, характеризующих систему и изменяющихся в области D), можно найти, если известна характеристическая функция

$$\varphi(u) = \int_D \psi^*(q, t) e^{iuA} \psi(q, t) dt, \quad (1)$$

где e^{iuA} — оператор, который определяется формулой

$$e^{iuA} = 1 + iuA + \frac{(iu)^2}{2} A^2 + \dots + \frac{(iu)^n}{n!} A^n + \dots \quad (2)$$

В самом деле, рассмотрим случай дискретного спектра, когда A имеет собственные значения α_k и собственные функции φ_k и $\psi = \sum_k c_k \varphi_k$. Имеем

$$\varphi(u) = \int_D \sum_k c_k^* \varphi_k^* e^{iuA} \sum_j c_j \varphi_j dt = \sum_{j,k} c_k^* c_j \int_D \varphi_k^* e^{iuA} \varphi_j dt. \quad (3)$$

Но поскольку

$$\begin{aligned} e^{iuA} \varphi_j &= \left(1 + iuA + \frac{(iu)^2}{2} A^2 + \dots \right) \varphi_j = \\ &= \left(1 + iu\alpha_j + \frac{(iu)^2}{2} \alpha_j^2 + \dots \right) \varphi_j = e^{iu\alpha_j} \varphi_j, \end{aligned} \quad (4)$$

мы получаем

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \sum_{j,k} c_k^* c_j e^{iu\alpha_j} \int_D \varphi_k^* \varphi_j d\tau = \sum_{j,k} c_k^* c_j e^{iu\alpha_j} \delta_{jk}, \\ \varphi(u) &= \sum_k |c_k|^2 e^{iu\alpha_k} = \overline{e^{iu\alpha}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Это вполне соответствует определению характеристической функции, которая представляет собой среднее значение величины $\exp(iu\alpha)$.

В случае непрерывного спектра получим

$$\varphi(u) = \int |c(\alpha)|^2 e^{iu\alpha} d\alpha = \overline{e^{iu\alpha}} \quad (6)$$

(доказательство этой формулы основывается на использовании собственных дифференциалов).

Можно считать, что введение характеристической функции, дающей возможность одновременно определять как собственные значения величины A , так и соответствующие им вероятности, эквивалентно двум фундаментальным принципам — принципу квантования и принципу спектрального разложения¹⁾.

Арнос предложил простой способ вычисления характеристической функции $\varphi(u)$. Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{i} \frac{\partial \chi}{\partial u} = A \chi, \quad (7)$$

характеризующее зависимость от u функции $\chi(q, u)$ координат q и переменной u . Если $\chi(q, 0)$ есть значение величины χ при $u = 0$, то (поскольку A не зависит от u) имеем

$$\chi(q, u) = e^{iuA} \chi(q, 0). \quad (8)$$

¹⁾ В добавленном позднее замечании о приведенных в тексте вычислениях автор показывает, что определения Арноса остаются справедливыми и в случае оператора A , зависящего от времени, но при условии, что он не действует на временную переменную t . — Ж. Л.

В самом деле, как нетрудно убедиться, функция $\chi(q, u)$ удовлетворяет уравнению (8) и к тому же при $u = 0$ мы получаем начальное выражение $\chi(q, 0)$. Предположим теперь, что начальное выражение $\chi(q, 0)$ совпадает с волновой функцией ψ системы в интересующий нас момент времени t , т. е. положим $\chi(q, 0) = \psi(q, t)$. В результате получим $\chi(q, u) = \exp(iuA)\psi(q, t)$ и

$$\varphi(u) = \int_D \psi^*(q, t) e^{iuA} \psi(q, t) d\tau = \int_D \chi^*(q, 0) \chi(q, u) d\tau.$$

Если воспользоваться терминологией теории гильбертовых пространств, то можно сказать, что $\varphi(u)$ есть скалярное произведение вектора $\chi(q, 0)$ на вектор $\chi(q, u)$. Поэтому самый простой способ найти характеристическую функцию — написать уравнение $\partial\chi/\partial u = A\chi$, найти его решение, которое сводилось бы к ψ при $u = 0$, а затем вычислить скалярное произведение:

$$\varphi(u) = \int_D \chi^*(q, 0) \chi(q, u) d\tau.$$

Если $\chi(q, u)$ можно разложить по полной системе собственных ортонормированных функций в виде $\chi(q, u) = \sum_m c_m(u) \varphi_m(q)$, то будем иметь

$$\varphi(u) = \sum_m c_m^*(0) c_m(u). \quad (9)$$

Примеры

1. Энергия

Если наблюдаемой A является энергия, то $A = H$ и

$$\varphi(u) = \int_D \psi^* e^{iuH} \psi d\tau.$$

В случае когда H не зависит от времени, уравнение $(1/i) (\partial\chi/\partial u) = H\chi$ сводится к волновому уравнению, если только положить $u = (2\pi/h)t$, а поэтому χ можно отождествить с ψ . Тогда

$$\psi(q, t) = e^{(2\pi i/h)Ht} \psi(q, 0), \quad \chi(q, u) = e^{iuH} \chi(q, 0) = e^{iuH} \psi(q, 0) \quad (10)$$

и, следовательно,

$$\varphi(u) = \int_D \psi^*(q, 0) e^{iuH} \psi(q, 0) d\tau. \quad (11)$$

Если возможно разложение

$$\psi(q, 0) = \sum_n c_n \psi_n(q), \quad (12)$$

где ψ_n — собственные функции оператора H , то получим

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \sum_{m,n} c_m^* c_n \int_D \psi_m^* e^{iuH} \psi_n d\tau = \sum_{m,n} c_m^* c_n e^{iuE_n} \int_D \psi_m^* \psi_n d\tau = \\ &= \sum_n |c_n|^2 e^{iuE_n} = e^{i\overline{u}E}. \end{aligned} \quad (13)$$

2. Составляющая импульса

Пусть, например, $A = -(h/2\pi i)(\partial/\partial x)$. Если положить $s = hu/2\pi$, то уравнение $\partial\chi/\partial u = A\chi$ примет вид

$$\frac{\partial\chi}{\partial s} = -\frac{\partial\chi}{\partial x}, \quad \text{откуда } \chi(x, s) = \chi(x - s). \quad (14)$$

Полагая $\chi(x, 0) = \psi(x, t)$, получаем

$$\varphi(u) = \int_D \psi^*(x, t) \psi(x - s, t) d\tau.$$

Оператор $\exp(iuA)$, примененный к какой-либо функции $f(x)$, дает

$$\begin{aligned} \exp(iuA)f(x) &= \exp\left(-s\frac{\partial}{\partial x}\right)f(x) = \left(1 - s\frac{\partial}{\partial x} + \frac{s^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \dots \right. \\ &\quad \left. + (-1)^n \frac{s^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial x^n} + \dots\right)f(x) = f(x - s) \end{aligned} \quad (15)$$

в силу формулы Маклорена.

Таким образом, оператор $\exp(iuA)$ есть оператор смещения, и это указывает на связь операторов, соответствующих компонентам импульса, с группой трансляций.

3. Составляющая M_z углового момента

В сферической системе координат r, θ, φ с углами θ и φ , отсчитываемыми относительно оси Oz , имеем

$$A = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Положив $s = hu/2\pi$, из уравнения $\partial\chi/\partial u = A\chi$ получим равенство $\partial\chi/\partial s = -\partial\chi/\partial\varphi$, откуда следует, что $\chi(\varphi, s) = \chi(\varphi - s)$. Если $\chi(\varphi, 0) = \psi(\varphi, t)$, то

$$\varphi(u) = \int_D \psi^*(\varphi, t) \psi(\varphi - s, t) d\tau.$$

В результате действия оператора $\exp(iuA)$ на некую функцию $f(\varphi)$ получим

$$\exp(iuA)f(\varphi) = \exp\left(-s \frac{\partial}{\partial \varphi}\right)f(\varphi) = f(\varphi - s). \quad (16)$$

Таким образом, он представляет собой оператор вращения вокруг оси Oz , и мы видим связь между оператором, отвечающим одной из компонент углового момента, и группой вращений вокруг соответствующей оси.

4. Оператор p_x^2

Если $A = (h^2/4\pi^2)(\partial^2/\partial x^2)$, то, положив $s = 2\pi i/h$, уравнение $\partial\chi/\partial iu = A\chi$ можно записать в виде

$$\frac{\partial\chi}{\partial s} = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial^2\chi}{\partial x^2},$$

т. е. в виде уравнения теплопроводности с мнимым коэффициентом теплопроводности.

Решение, которое при $s = 0$ совпадает с функцией $\psi(x, t)$, было найдено еще Фурье и имеет вид

$$\chi(x, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x - v, t) \frac{\exp(-\pi h v^2 / 2is)}{\sqrt{2is/h}} dv, \quad (17)$$

откуда

$$\varphi(u) = \int_D \psi(x, t) \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x - v, t) \frac{\exp(-h^2 v^2 / 4iu)}{\sqrt{(4\pi i/h)u}} dv dt. \quad (18)$$

Такая же формула справедлива и для оператора M_z^2 , если только x заменить величиной φ .

Частица Дарвина

Арнус привел интересные примеры применения своего общего метода. В частности, он рассмотрел случай частицы Дарвина. Приведем некоторые из этих результатов, ограничиваясь случаем одного измерения x .

Частица Дарвина — это свободная частица, для которой волна ψ является решением уравнения

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \quad (\text{одно измерение}),$$

причем начальное выражение для ψ (в момент времени $t = 0$) имеет вид

$$\psi(x, 0) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} m v_x x\right). \quad (19)$$

Положив $a = h/4\pi m \sigma^2$, для момента t получим

$$\psi(x, t) = [\sigma\sqrt{2\pi}(1 + a^2 t^2)]^{-1/2} \times \\ \times \exp\left(-\frac{1}{4\sigma^2} \frac{(x - v_x t)^2}{1 + a^2 t^2}\right) \exp\left[\frac{\pi i m}{h t} \left(\frac{(x - v_x t)^2}{1 + a^2 t^2} - x^2\right)\right]. \quad (20)$$

В таком случае плотность вероятности присутствия соответствует распределению Гаусса (функция ψ и была выбрана так, чтобы выполнялось это условие):

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 t^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{(x - v_x t)^2}{1 + a^2 t^2}\right). \quad (21)$$

Это — распределение Гаусса, средняя точка $x = v_x t$ которого равномерно перемещается со временем. Соответствующая дисперсия имеет вид

$$\sigma_x = \sigma \sqrt{1 + a^2 t^2}.$$

С течением времени она возрастает, т. е. волновой пакет расплывается.

Интересным примером применения метода Арнуса может служить вычисление распределения вероятностей для величины p_x . В этом случае характеристическая функция имеет вид (см. с. 225)

$$\varphi(u) = \int_D \psi^*(x, t) \psi(x - s, t) dx, \text{ где } s = (h/2\pi)u.$$

Но поскольку здесь составляющая импульса p_x является полным интегралом, ее распределение вероятностей не зависит от времени (ибо в любой момент времени $A^n = \int_D \psi^* A^n \psi d\tau$ есть постоянная величина), как будет показано несколько ниже. В связи с этим можно написать

$$\varphi(u) = \int_D \psi^*(x, 0) \psi(x - s, 0) dx,$$

что дает

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{2\sigma^2} + \frac{sx}{2\sigma^2} - \frac{s^2}{4\sigma^2} + \frac{2\pi}{h} miv_x s \right) dx. \quad (22)$$

В результате интегрирования, сводящегося к известным формулам, легко получим

$$\varphi(u) = e^{-\frac{s^2}{8\sigma^2}} e^{\frac{2\pi i}{h} mv_x s} = e^{i umv_x} e^{-\frac{h^2 u^2}{32\pi^2 \sigma^2}}. \quad (23)$$

Но это именно то, что мы должны получить (см. с. 197) для некой величины p_x с гауссовым распределением вероятностей:

$$\varphi(u) = \exp(iu\bar{p}_x) \exp\left(-\sigma_{p_x}^2 \frac{u^2}{2}\right). \quad (24)$$

Следовательно, величине p_x тоже соответствует гауссово распределение вероятностей со средним значением и дисперсией

$$\bar{p}_x = mv_x, \quad \sigma_{p_x} = h/4\pi\sigma. \quad (25)$$

Поскольку в начальный момент времени $\sigma_x = \sigma$, мы имеем $\sigma_x \sigma_{p_x} = h/4\pi$. Таким образом, произведение дисперсий принимает минимальное возможное значение. Можно показать, что оно достижимо только в данном случае. С течением времени же пакет расплывается и величина σ_x становится больше σ , так что $\sigma_x \cdot \sigma_{p_x} > h/4\pi$.

2. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ В СЛУЧАЕ ДВУХ КОММУТИРУЮЩИХ ВЕЛИЧИН

Ничто не мешает обобщить метод Арнуса на случай двух (или большего числа) коммутирующих величин. Пусть A и B — две физические величины, которым соответствуют коммутирующие операторы, т. е. $[A, B] = 0$. Тогда можно положить

$$\varphi(u, v) = \int_D \psi^* e^{iuA + ivB} \psi d\tau. \quad (26)$$

Отсюда находится функция распределения $F(\alpha, \beta)$ для собственных значений α и β операторов A и B или (в непрерывном случае) плотность распределения $\rho(\alpha, \beta)$. Здесь какие-либо трудности не возникают, поскольку величины A и B

могут быть измерены одновременно. Обобщение на случай n коммутирующих величин A, B, C, \dots проводится тривиальным образом.

Чтобы более конкретно представить себе, как применяется данная вероятностная схема, нужно вспомнить теорему о том, что *необходимым и достаточным условием существования общей системы собственных функций у двух операторов A и B является их коммутруемость*.

Не останавливаясь на различных особенностях, связанных с применением этой теоремы к различным частным случаям (что было сделано выше), я приведу лишь один простой пример. Представим себе свободную частицу (внешнее поле равно нулю). Рассмотрим два оператора $H_{\text{опер}}$ и $(p_x)_{\text{опер}}$:

$$H_{\text{опер}} = -\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \Delta, \quad (p_x)_{\text{опер}} = -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}.$$

Поскольку эти операторы коммутируют, они должны иметь общую систему собственных функций. В самом деле, для полного оператора H собственными (ненормированными) функциями будут плоские волны

$$\psi(p_x, p_y, p_z) = \exp\left(-\frac{2\pi i}{\hbar}(p_x x + p_y y + p_z z)\right), \quad (27)$$

а для оператора $(p_x)_{\text{опер}}$ собственными функциями будут функции $\exp\{-2\pi i/h p_x x\}$. По указанной выше теореме собственную функцию оператора H всегда можно представить в виде произведения собственной функции оператора p_x на функцию переменных y и z , на которые не действует оператор p_x . К тому же, как мы знаем, собственные значения оператора $H_{\text{опер}}$ имеют вид

$$E = (1/2m)(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2).$$

Поэтому если $p_x^2/2m < E$, то при заданных значениях E и p_x имеется бесконечное число возможных значений p_y и p_z . Таким образом, данное собственное значение E вырождено с порядком вырождения, равным бесконечности, и имеется бесконечное число соответствующих собственных функций, пропорциональных собственной функции $\exp(-2\pi i p_x x/h)$ оператора $(p_x)_{\text{опер}}$.

Предположим теперь, что мы имеем дело с двумя коммутирующими величинами A и B , оператор одной из которых, а именно A , является полным. Пусть φ_i — собственные функции оператора A и χ_k — собственные функции оператора B . Мы имеем $\varphi_{ik}(x, \dots, y, \dots) = f_{ik}(y, \dots)\chi_k(x)$, и если написать разложение волновой функции ψ , то мы получим

$$\begin{aligned} \psi(x, \dots, y, \dots) &= \sum_i c_i \varphi_i(x, \dots, y, \dots) = \\ &= \sum_{i,k} c_i f_{ik}(y, \dots) \chi_k(x) = \sum_k b_k(y) \chi_k(x). \quad (28) \end{aligned}$$

В результате будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= \int_D \psi^* e^{iuA} + ivB \psi d\tau = \\ &= \sum_k |c_k|^2 e^{iu\alpha_k} e^{iv\beta_k} = e^{iu\alpha} + iv\beta. \end{aligned} \quad (29)$$

Предположение о полноте оператора A не имеет существенного значения, и от него можно отказаться, что приведет лишь к некоторым усложнениям в записи формул.

В случае когда оба оператора A и B полные, из указанной выше теоремы следует, что имеется полная система собственных функций, зависящих от всех переменных, входящих в выражения для операторов A и B , которая является общей для обоих операторов. Если A и B обладают невырожденными собственными значениями, то каждая собственная функция системы соответствует одновременно некоему собственному значению оператора A и некоему собственному значению оператора B , так что собственные значения этих двух операторов находятся во взаимно однозначном соответствии: зная некое значение оператора A , мы знаем соответствующее значение B , и наоборот. Если же один из двух операторов имеет вырожденные собственные значения, то соответствие не является взаимно однозначным.

Если операторы A и B независимы, т. е. если они действуют на разные переменные x и y , то все общие собственные функции операторов A и B можно получить, умножив каждую из собственных функций оператора A на все собственные функции оператора B .

3. КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ, МАРГИНАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Поскольку в случае коммутирующих величин оказывается возможным определить характеристическую функцию, мы можем теперь говорить о дисперсии, коэффициенте корреляции, маргинальных распределениях, регрессиях и т. д.

Коэффициент корреляции определяется по формуле

$$r = \frac{\overline{AB} - \bar{A}\bar{B}}{\sigma_A \sigma_B}. \quad (30)$$

Вообще говоря, он отличен от нуля. Рассмотрим, например, случай, когда операторы A и B являются полными и обладают невырожденными собственными значениями. Тогда у них одна и та же система собственных функций φ_j , и если $\psi = \sum_k c_k \varphi_k$, то, очевидно,

$$r = \frac{\sum_k |c_k|^2 \alpha_k \beta_k - \sum_k |c_k|^2 \alpha_k \sum_j |c_j|^2 \beta_j}{\sigma_A \sigma_B}. \quad (31)$$

Такое выражение может быть равным нулю лишь в каких-либо особых случаях, например если все коэффициенты c равны нулю, кроме одного, равного по модулю единице, и в этом случае A и B имеют вполне определенные значения.

В качестве другого примера рассмотрим две независимые величины A и B , когда оператор A зависит лишь от переменных x, \dots , а оператор B — от переменных y, \dots . Пусть собственными значениями оператора A являются α_i и соответствующие собственные функции равны $\varphi_i(x, \dots)$ и соответственно для оператора B — β_k и $\chi_k(y, \dots)$. Тогда разложение функции ψ имеет вид

$$\psi = \sum_{i,k} c_{ik} \varphi_i(x, \dots) \chi_k(y, \dots),$$

где коэффициенты c_{ik} — постоянные при условии, что совокупностью всех x, \dots и всех y, \dots исчерпывается совокупность переменных, от которых зависит ψ . В таком случае

$$r = \frac{\sum_{i,k} |c_{ik}|^2 \alpha_i \beta_k - \sum_{i,k} |c_{ik}|^2 \alpha_i \sum_{i,k} |c_{ik}|^2 \beta_k}{\sigma_A \sigma_B} \quad (32)$$

Хотя операторы A и B независимы в том смысле, что они действуют на разные переменные, соответствующие им величины A и B , вообще говоря, не являются статистически независимыми, поскольку данное выражение, вообще говоря, не обязано быть равным нулю. Это объясняется тем, что вероятности возможных значений A и B связаны между собой формулой разложения функции ψ , т. е. значениями коэффициентов c_{ik} .

Перейдем теперь к маргинальным распределениям. Чтобы внести некоторое разнообразие в изложение и чтобы подготовиться к дальнейшему, мы возьмем случай непрерывного распределения вероятностей (когда оператор имеет непрерывный спектр). Предположим, что один из операторов A является полным; его собственные значения α изменяются непрерывно в некоторой области, его собственные функции обозначим через $\varphi(\alpha, x, \dots, y, \dots)$. Пусть оператор B — неполный, его собственные значения β тоже изменяются непрерывно, его собственные функции обозначим через $\chi(\beta, \dots)$. Так как по предположению A и B коммутируют, естественным образом переходя от рассмотренного выше дискретного случая к непрерывному, имеем

$$\varphi(\alpha, \beta, x, \dots, y, \dots) = d(\alpha, \beta, y, \dots) \chi(\beta, x, \dots).$$

Пусть разложение для ψ имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(x, \dots, y, \dots) &= \int c(\alpha, \beta) \varphi(\alpha, \beta, x, \dots, y, \dots) d\alpha d\beta = \\ &= \int c(\alpha, \beta) d(\alpha, \beta, y, \dots) \chi(\beta, x, \dots) d\alpha d\beta. \end{aligned} \quad (33)$$

Вероятность обнаружить собственное значение α наблюдаемой A , очевидно,

дается плотностью распределения

$$\rho_A(\alpha) = \int |c(\alpha, \beta)|^2 d\beta. \quad (34)$$

Вероятность обнаружения собственного значения β наблюдаемой B дается плотностью распределения, получаемой путем интегрирования по переменным y квадрата модуля коэффициента при $\chi(\beta, x, \dots)$ в разложении функции ψ , т. е.

$$\rho_B(\beta) = \int dy \dots \int |c(\alpha, \beta)|^2 d\alpha. \quad (35)$$

Что касается вероятности получить одновременно собственное значение α наблюдаемой A и собственное значение β наблюдаемой B , то она, очевидно, равна

$$\rho(\alpha, \beta) = |c(\alpha, \beta)|^2. \quad (36)$$

Отсюда сразу же следует, как нетрудно убедиться, равенство

$$\int \rho(\alpha, \beta) d\beta = \rho_A(\alpha).$$

Что же касается формулы

$$\int \rho(\alpha, \beta) d\alpha = \rho_B(\beta),$$

то для ее доказательства напомним

$$\begin{aligned} \rho_B(\beta) &= \int dy \dots \int c^*(\alpha, \beta) d^*(\alpha, \beta, y, \dots) d\alpha \int c(\alpha', \beta) d(\alpha', \beta, y, \dots) d\alpha' = \\ &= \iint d\alpha d\alpha' c^*(\alpha, \beta) c(\alpha', \beta) \int dy d^*(\alpha, \beta, y, \dots) d(\alpha', \beta, y, \dots) \end{aligned} \quad (37)$$

и учтем, что должно выполняться равенство

$$\iint \varphi^*(\alpha, \beta, x, \dots, y, \dots) \varphi(\alpha', \beta, x, \dots, y, \dots) dx dy = \delta(\alpha - \alpha') \quad (38)$$

(ибо функции φ ортонормированы), т. е.

$$\begin{aligned} \iint d^*(\alpha, \beta, y, \dots) d(\alpha', \beta, y, \dots) \chi^*(\beta, x, \dots) \chi(\beta, x, \dots) dx dy = \\ = \int dy d^*(\alpha, \beta, y, \dots) d(\alpha', \beta, y, \dots) = \delta(\alpha - \alpha'). \end{aligned} \quad (39)$$

Отсюда следует равенство

$$\begin{aligned} \rho_B(\beta) &= \int \int d\alpha d\alpha' c^*(\alpha, \beta) c(\alpha', \beta) \delta(\alpha - \alpha') = \\ &= \int |c(\alpha, \beta)|^2 d\alpha = \int \rho(\alpha, \beta) d\alpha, \end{aligned} \quad (40)$$

что и требовалось доказать.

В наших рассуждениях мы предполагали, что оператор A — полный, а оператор B — неполный. Аналогичные рассуждения можно провести в случае, когда операторы A и B являются неполными или даже независимыми. Во всех случаях одинаково просто определяются условные плотности распределения

$$\rho_A^{(B)}(\alpha, \beta) = \frac{\rho(\alpha, \beta)}{\rho_B(\beta)}, \quad \rho_B^{(A)}(\alpha, \beta) = \frac{\rho(\alpha, \beta)}{\rho_A(\alpha)}. \quad (41)$$

В случае коммутирующих величин A и B все эти величины имеют тот самый смысл, какой обычно им придается в теории вероятностей. Но как мы увидим далее, если операторы A и B не коммутируют, то прямо пользоваться обычными формулами становится невозможно. Этот вопрос требует более тщательного анализа.

В случае свободной частицы Дарвина (вероятность присутствия которой подчиняется распределению Гаусса) Арнус в своей диссертации исследовал пары величин (H, p_x) и (H, M_z) , которые в случае свободной частицы коммутируют между собой. Для первой из этих пар он рассчитал кривую регрессии и нашел дисперсию. Хотя его вычисления и представляют интерес как иллюстрация к данной теории, в физическом отношении они не содержат новых результатов, а потому мы их здесь не касаемся.

4. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКИ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Арнус рассмотрел общие теоремы волновой механики с точки зрения использования введенной им характеристической функции. Рассмотрим несколько заимствованных у него примеров.

а) Интегралы движения (см. с. 84)

Согласно нашему определению, величина A есть интеграл движения, если все матричные элементы

$$\alpha_{ij} = \int_D \psi_i^* A \psi_j d\tau$$

не меняются с течением времени, причем для A мы получили условие

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h}(AH - HA) \equiv 0.$$

Теперь мы покажем, что из этого определения вытекает независимость от времени распределения вероятностей величины A . С этой целью прежде всего отметим, что если ψ есть некая линейная комбинация $\sum_i c_i \psi_i$, то

$$\bar{A} = \int_D \psi^* A \psi d\tau = \sum_{i,k} c_i^* c_k \int_D \psi_i^* A \psi_k d\tau, \quad (42)$$

так что если A — интеграл движения, то первый момент \bar{A} распределения вероятностей случайной величины A не будет зависеть от времени.

В более общем случае если

$$\frac{\partial A^k}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h} (A^k H - H A^k) \equiv 0 \text{ при } k = 1, \dots, n,$$

то мы также имеем

$$\frac{\partial A^{n+1}}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h} (A^{n+1} H - H A^{n+1}) \equiv 0.$$

В самом деле, умножив обе части слева n -го уравнения на A , получим

$$A \frac{\partial A^n}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h} (A^{n+1} H - A H A^n) \equiv 0. \quad (43)$$

Но

$$A H = H A - \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial A}{\partial t},$$

откуда

$$A \frac{\partial A^n}{\partial t} = - \frac{2\pi i}{h} (A^{n+1} H - H A^{n+1}) - \frac{\partial A}{\partial t} A^n,$$

и, поскольку

$$\frac{\partial}{\partial t} (A^{n+1}) = \frac{\partial}{\partial t} (A \cdot A^n) = \frac{\partial A}{\partial t} A^n + A \frac{\partial A^n}{\partial t},$$

получаем

$$\frac{\partial A^{n+1}}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h} (A^{n+1} H - H A^{n+1}) \equiv 0,$$

что и требовалось доказать.

Отсюда в силу рекуррентности данных соотношений получим, что если

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h}(AH - HA) \equiv 0,$$

то выполняется также равенство

$$\frac{\partial A^n}{\partial t} + (A^n H - H A^n) \equiv 0$$

при любом целом n . Таким образом, если A есть интеграл движения, то интегралом движения является и A^n . И еще: если A есть интеграл движения, то все моменты

$$A^n = \int_D \psi^* A^n \psi d\tau$$

распределения вероятностей случайной величины A не зависят от времени. Поскольку же задание всех моментов распределения эквивалентно заданию самого распределения, последнее тоже не зависит от времени, что и требовалось доказать. Отметим, что из независимости распределения вероятностей для случайной величины A от времени следует постоянство как собственных значений величины A , так и соответствующих вероятностей.

Поскольку распределение вероятностей величины A не меняется в том и только в том случае, если A есть интеграл движения, соответствующая характеристическая функция

$$\varphi(u) = \int_D \psi^* e^{iuA} \psi d\tau$$

тоже не должна меняться. Но так как функция ψ , являющаяся решением волнового уравнения

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi,$$

определяется своим начальным значением ψ_0 , существует унитарный оператор $U(t)$, являющийся функцией времени, который преобразует ψ_0 в ψ :

$$\psi(q, t) = U(t)\psi(q, 0), \quad (44)$$

где q — совокупность переменных с областью изменения D , а оператор U удовлетворяет условию $U^{-1}(t) = U^+(t)$.

Если оператор H не зависит от времени, то

$$U(t) = \exp\left(\frac{2\pi i}{h} Ht\right). \quad (45)$$

Если H зависит от времени, то U имеет более сложный вид. Постоянство характеристической функции по отношению к времени выражается формулой

$$\int_D \psi^*(q, t) e^{iuA(t)} \psi(q, t) d\tau = \int_D \psi^*(q, 0) e^{iuA(0)} \psi(q, 0) d\tau, \quad (46)$$

или

$$\begin{aligned} \int_D U^*(t) \psi^*(q, 0) e^{iuA(t)} U(t) \psi(q, 0) d\tau = \\ = \int_D \psi^*(q, 0) U^+ e^{iuA(t)} U \psi(q, 0) d\tau = \int_D \psi^*(q, 0) e^{iuA(0)} \psi(q, 0) d\tau, \end{aligned} \quad (47)$$

или также

$$\int_D \psi^*(q, 0) [U^+ e^{iuA(t)} U - e^{iuA(0)}] \psi(q, 0) d\tau = 0. \quad (48)$$

Поскольку данное соотношение должно выполняться вне зависимости от вида функции $\psi(q, 0)$, мы имеем

$$U^+ e^{iuA(t)} U \equiv e^{iuA(0)}, \quad \text{или} \quad e^{iuA(t)} U \equiv U e^{iuA(0)}. \quad (49)$$

Если H не зависит от t , то

$$U = \exp(2\pi i H t / h) = \exp(ivH), \quad \text{где} \quad v = 2\pi t / h,$$

и выполняется условие $e^{iuA(t)} e^{ivH} \equiv e^{ivH} e^{iuA(0)}$. Если A тоже не зависит от времени, то $A(t) = A(0) = A$ и $e^{iuA} e^{ivH} \equiv e^{ivH} e^{iuA}$. Данное перестановочное соотношение может выполняться (что легко доказывается путем разложения экспонент в ряды) лишь в том случае, если A и H коммутируют. Таким образом, условие существования интеграла движения имеет вид $AH = HA$, что нам известно.

Рассмотрим теперь общий случай, когда и A , и H зависят от времени. Условие существования интеграла движения может быть записано в виде $e^{iuA(t)} = U e^{iuA(0)} U^{-1}$, и, как нетрудно видеть, оно эквивалентно соотношению $A(t) = U(t) A(0) U^{-1}(t)$. Но из определения оператора $U(t)$ следует, что он удовлетворяет уравнению

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial U}{\partial t} = HU,$$

тогда как обратный оператор U^{-1} подчиняется уравнению

$$-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial U^{-1}}{\partial t} = U^{-1} H.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{2\pi i}{h} \frac{\partial A(t)}{\partial t} &= \left[\frac{\partial U(t)}{\partial t} A(0)U^{-1}(t) + U(t)A(0) \frac{\partial U^{-1}(t)}{\partial t} \right] \frac{2\pi i}{h} = \\ &= HUA(0)U^{-1} - UA(0)U^{-1}H = HA - AH, \end{aligned} \quad (50)$$

откуда получаем известное условие

$$\frac{\partial A(t)}{\partial t} + \frac{h}{2\pi i} [A(t)H - HA(t)] \equiv 0. \quad (51)$$

[Уравнение $-(h/2\pi i)(\partial U^{-1}/\partial t) = U^{-1}H$ сразу же следует из формулы $\psi(q, 0) = U^{-1}(t)\psi(q, t)$, если продифференцировать ее по времени, что даст $0 = (\partial U^{-1}/\partial t)\psi + U^{-1}(2\pi i/h)H\psi$ для любой функции ψ .]

б) Принцип интерференции

Этот принцип следует прямо из определения характеристической функции, так как если $A = x$, то

$$\varphi(u) = \int_D \psi^* e^{iux} \psi d\tau = 1 + iu\bar{x} + \dots,$$

где

$$\bar{x} = \int_D x |\psi|^2 d\tau,$$

откуда и явствует, что вероятность обнаружения частицы в точке x равна $|\psi|^2$.

в) Распределения вероятностей для величин p_x , M_z , p_x^2 и M_z^2

Арнус исследовал связь между характеристической функцией и распределения вероятностей для величин p_x , M_z , p_x^2 и M_z^2 . Это позволило ему сделать ряд интересных математических выводов. Но мы их не рассматриваем, поскольку результаты, существенные для физика, нам уже известны.

г) Теоремы о центре тяжести системы частиц

Рассмотрим систему частиц с массами m_1, \dots, m_n , и пусть $x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n$ — их координаты. Можно всегда (по крайней мере в рассматриваемой здесь нами волновой механике) ввести координаты центра тяжести такой системы

$$x_g = \frac{\sum_1^n m_i x_i}{\sum_1^n m_i}, \quad y_g = \frac{\sum_1^n m_i y_i}{\sum_1^n m_i}, \quad z_g = \frac{\sum_1^n m_i z_i}{\sum_1^n m_i} \quad (52)$$

и относительные координаты k -й частицы

$$\xi_k = x_k - x_g, \quad \eta_k = y_k - y_g, \quad \zeta_k = z_k - z_g. \quad (53)$$

Очевидно, что выполняются равенства

$$\begin{aligned} \sum_1^n m_k \xi_k &= \sum_1^n m_k x_k - \sum_1^n m_k x_g = 0, \\ \sum_1^n m_k \eta_k &= \sum_1^n m_k \zeta_k = 0. \end{aligned} \quad (54)$$

Путем рассуждений, детальное изложение которых читатель найдет, например, в моей книге о системах частиц в волновой механике, можно доказать теоремы, которые в волновой механике систем частиц аналогичны теоремам классической механики систем. Арнус дал для этих теорем синтетическое доказательство (опирающееся на использование характеристической функции), которое мы здесь приводим.

Рассмотрим величину

$$P_x = \sum_1^n p_{x_k}.$$

Соответствующий оператор имеет вид

$$- \frac{h}{2\pi i} \sum_1^n \frac{\partial}{\partial x_k},$$

а характеристическая функция такова:

$$\begin{aligned} \varphi_{P_x}(u) &= \int_D \psi^* \exp\left(-\frac{h}{2\pi} u \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right) \psi d\tau = \\ &= \int_D \psi^* \exp\left(-s \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right) \psi d\tau, \end{aligned} \quad (55)$$

где $s = hu/2\pi$. Но по теореме Тейлора имеем

$$\exp\left(-s \frac{\partial}{\partial x}\right) f(x) = \left(1 - s \frac{\partial}{\partial x} + \frac{s^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \dots\right) f(x) = f(x - s), \quad (56)$$

так что

$$\varphi_{P_x}(u) = \int_D \psi^*(\dots, x_k, \dots) \psi(\dots, x_k - s, \dots) d\tau \quad (57)$$

или, после замены переменных $(x_1, \dots, z_n) \rightarrow (x_g, \dots, \zeta_n)$,

$$\varphi_{P_x}(u) = \int_D \psi^*(\dots, \xi_k + x_g, \dots) \psi(\dots, \xi_k + x_g - s, \dots) d\tau. \quad (58)$$

Но

$$\begin{aligned} \psi(\dots, \xi_k + x_g - s, \dots) &= \exp\left(\frac{2\pi i}{h} sp_{x_g}\right) \psi(\dots, \xi_k + x_g, \dots) = \\ &= \exp(iup_{x_g}) \psi(\dots, \xi_k + x_g, \dots), \end{aligned} \quad (59)$$

и окончательно

$$\varphi_{P_x}(u) = \int_D \psi^*(\dots, \xi_k + x_g, \dots) \exp(iup_{x_g}) \psi(\dots, \xi_k + x_g, \dots) d\tau. \quad (60)$$

Таким образом, характеристическая функция для P_x совпадает с характеристической функцией для p_{x_g} . Отсюда следует первая теорема, аналогичная классической теореме об импульсе центра тяжести (первой теореме Кенига).

Теорема. Полный импульс системы равен импульсу ее центра тяжести.

Рассмотрим теперь составляющую M_z углового момента системы

$$(M_z)_{\text{опер}} = \sum_{k=1}^n \left\{ -\frac{h}{2\pi i} \left(x_k \frac{\partial}{\partial y_k} - y_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \right\}. \quad (61)$$

Соответствующая характеристическая функция имеет вид ($s = hu/2\pi$)

$$\begin{aligned} \varphi_{M_z}(u) &= \int \psi^*(\dots, x_k y_k z_k, \dots) \times \\ &\times \psi(\dots, x_k \cos s - y_k \sin s, y_k \cos s + x_k \sin s, z_k, \dots) d\tau. \end{aligned} \quad (62)$$

После замены переменных $(x_1, \dots, z_n) \rightarrow (x_g, \dots, \zeta_n)$ получим

$$\begin{aligned} x_k \cos s - y_k \sin s &\rightarrow (x_g + \xi_k) \cos s - (y_g + \eta_k) \sin s = \\ &= x_g \cos s - y_g \sin s + \xi_k \cos s - \eta_k \sin s. \end{aligned} \quad (63)$$

Тогда

$$\varphi_{M_z}(u) = \int_D \psi^*(\dots, x_k, y_k, z_k, \dots) \exp[iu(M_{g_z} + M_{\zeta})] \psi(\dots, x_k, y_k, z_k, \dots) d\tau, \quad (64)$$

где

$$M_{g_z} = -\frac{h}{2\pi i} \left(x_g \frac{\partial}{\partial y_g} - y_g \frac{\partial}{\partial x_g} \right),$$

$$M_{\zeta} = \sum_{k=1}^n \left\{ -\frac{h}{2\pi i} \left(\xi_k \frac{\partial}{\partial \eta_k} - \eta_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \right) \right\}. \quad (65)$$

Отсюда $M_z = M_{g_z} + M_{\zeta}$.

Тем самым доказана теорема, аналогичная второй классической теореме Кеннига:

Теорема. Полный угловой момент системы равен сумме углового момента центра тяжести и углового момента движения относительно центра тяжести.

В диссертации Арнуса много и других интересных доказательств, но мы на них здесь не будем останавливаться.

Рассмотрим теперь более детально вопрос о приложении обычного аппарата теории вероятностей к случаю двух некоммутирующих переменных, что даст нам возможность внести ясность в некоторые очень важные моменты теории.

5. СЛУЧАЙ ДВУХ НЕКОММУТИРУЮЩИХ ВЕЛИЧИН

Мы показали, что в случае двух коммутирующих величин нетрудно определить характеристическую функцию и найти распределение вероятностей, поступая так, как это обычно делается в статистике. В случае же некоммутирующих величин, которые, как мы знаем, не могут быть одновременно измерены, в соответствии со сказанным на с. 208 и далее при применении обычного аппарата мы должны ожидать трудностей. Так и происходит в действительности, в связи с чем нам нужно тщательно изучить данную проблему. Но сначала уточним некоторые важные вопросы.

а) Еще раз о редукции пакета вероятности в процессе измерения

Как мы знаем, в физической интерпретации волновой механики измерение играет принципиально важную роль. Именно оно, давая нам новую информацию, изменяет состояние наших знаний об изучаемой системе и тем самым заставляет нас резко менять форму волны ψ , которая представляет все, что нам известно о системе. Например, если при измерении более или менее точно определяется положение, то волновой пакет, который до измерения характеризовался функцией ψ , «редуцируется» в более узкий волновой пакет, который стягивается почти в точку, если измерение является точным, поскольку уменьшаются размеры области пространства, в которой вероятность $|\psi|^2$ отлична от нуля. Этим и объясняется термин «редукция пакета вероятности», введенный Гейзенбергом для указанного резкого изменения функции ψ . Если же при измерении определяется одна из составляющих импульса, то редукция пакета вероятности происходит не в обычном, а в импульсном пространстве.

Редукция пакета вероятности приводит к новому состоянию, характеризующемуся новой функцией ψ , — состоянию, которое нельзя было предсказать заранее, поскольку до фактического проведения измерений можно было вычислить лишь вероятности различных результатов измерения. В последних главах данной книги мы более детально проанализируем вопрос о том, каким образом операция измерения выделяет одну из возможностей, имевшихся в том состоянии, которое существовало до измерения. Вместе с фон Нейманом мы покажем, что недетерминированность, вводимая таким путем в атомную физику, несомненно, носит принципиальный характер, поскольку невозможно объяснить¹⁾ необходимость введения вероятностей так, как это делается в классической физике, — тем, что нам неизвестны точные значения некоторых «скрытых» величин.

Если измерение дало нам максимум сведений, допускаемый теорией некоммутирующих переменных, то мы можем найти волновую функцию ψ , характеризующую наши знания после измерения, и затем проследить за ее эволюцией во времени по волновому уравнению. Таким путем можем вычислять вероятности результатов различных измерений, которые захотели бы провести в какой-либо момент времени. Так обстоит дело до тех пор, пока мы не узнаем результаты новых измерений, которые изменяют состояние наших знаний и резко прервут плавную эволюцию воллы ψ . Эволюция же волны ψ в промежутке между двумя измерениями, описываемая волновым уравнением, полностью определяется начальным значением ψ , так как относительно времени волновое уравнение есть уравнение первого порядка. Таким образом, можно говорить о детерминированности эволюции функции ψ между двумя измерениями, но не о детерминированности наблюдаемых явлений.

Зная величину ψ после измерения, совершенно невозможно найти функцию ψ до измерения, так что измерение вносит в эволюцию разрыв. Возьмем очень большое число систем, находящихся в одном и том же состоянии ψ , и для каждой из них измерим какую-либо величину A с собственными функциями φ_j и собственными значениями α_j ; доля систем, для которых величина A принимает значение α_j , будет равна квадрату модуля коэффициента c_j в разложении $\psi = \sum_j c_j \varphi_j$ функции ψ до измерения. Таким образом, если мы знаем функцию ψ для ансамбля систем после измерения, то мы можем найти значения $|c_j|^2$, т. е. модули коэффициентов c_j , но для того, чтобы найти саму функцию ψ до измерения, нам нужно знать еще и фазы коэффициентов c_j , а таких сведений у нас нет.

Итак, при всяком измерении полностью теряется информация о фазах (Бор). Из этого следует, что акт измерения вносит в эволюцию функции ψ

¹⁾ Поправка, сделанная другими чернилами и несомненно гораздо позднее, существенно ослабляет это утверждение, которое в новой редакции выглядит так: «Вместе с фон Нейманом мы *спросим себя*, не носит ли недетерминированность, вводимая таким путем в атомную физику, принципиального характера и *действительно ли* невозможно объяснить . . . ». Курсивом мы выделили новые слова, добавленные автором; обратим внимание на исчезновение слова «несомненно». — Ж. Л.

разрыв, непреодолимый как в направлении от прошлого к будущему, так и в направлении от будущего к прошлому. Разности же фаз между состояниями φ_j функции ψ имеют принципиально важное значение; любые сведения о ψ , не содержащие информации о разности фаз, следует считать существенно неполными. Все важное значение фаз можно увидеть при исследовании принципиального вопроса об интерференции вероятностей.

б) Интерференция вероятностей

Рассмотрим две величины A и B , которые будем считать не коммутирующими между собой. Пусть собственными значениями и собственными функциями наблюдаемой A будут α_i и φ_i , а наблюдаемой B — β_j и χ_j . Наборы функций φ_i и χ_j не могут совпадать, так как операторы A и B не коммутируют (см. теорему на с. 89). Поскольку собственные функции χ_k образуют полную систему, функции φ_i можно выразить через χ_k по формулам вида

$$\varphi_i = \sum_k s_{ik} \chi_k, \quad (66)$$

где s_{ik} — элементы унитарной матрицы \mathcal{S} . В этом разложении, вообще говоря, должно быть несколько членов, поскольку системы функций φ_i и χ_k не совпадают между собой. Предположим теперь, что начальное состояние системы характеризуется волновой функцией $\psi = \sum_i c_i \varphi_i$. Тогда имеем

$$\psi = \sum_i c_i \varphi_i = \sum_{i,k} c_i s_{ik} \chi_k.$$

Если для системы, находящейся в данном состоянии, измерить величину A , то мы получим одно из собственных значений α_j , причем вероятность получить значение α_j будет равна $|c_j|^2$. После этого измерения система окажется в состоянии φ_j , а в этом новом состоянии измерение величины B дает значение β_k с вероятностью $|s_{jk}|^2$. Таким образом, полная вероятность получить для B значение β_k , измерив сначала A , а затем B , будет равна $\sum_i |c_i|^2 |s_{ik}|^2$.

Предположим теперь, что мы измеряем величину B непосредственно в начальном состоянии ψ . Тогда, разложив ψ по функциям χ_k , на основании общих принципов волновой механики получим, что вероятность получить для B значение β_k равна $|\sum_i c_i s_{ik}|^2$.

Это выражение существенно отличается от предыдущего, поскольку оно зависит от фаз коэффициентов c_i и s_{ik} , тогда как предыдущее выражение от них не зависит.

Приведем простой пример. Рассмотрим одномерную область протяженностью L . В этой области нормированные собственные функции импульса $p = A$ имеют вид

$$\varphi_i = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} p_i x\right).$$

Пусть

$$\psi = \sum_i \frac{c_i}{\sqrt{L}} \exp\left(\frac{2\pi i}{h}(W_i t - p_i x)\right)$$

будет волновая функция частицы в начальном состоянии. Если сначала измерить импульс p , а затем координату x , то вероятность получить значение $x = x_0$ будет равна

$$\sum_i |c_i|^2 \left| \frac{1}{\sqrt{L}} \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} p_i x_0\right) \right|^2 = \frac{1}{L}$$

(поскольку $\sum_i |c_i|^2 = 1$). Таким образом, все возможные положения частицы в рассматриваемой области L будут равновероятны. Если же непосредственно измерять x в начальном состоянии, то вероятность получить значение $x = x_0$ будет равна

$$\left| \sum_i \frac{c_i}{\sqrt{L}} \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} p_i x_0\right) \right|^2,$$

что соответствует интерференции плоских волн, составляющих ψ , причем данное выражение необходимо для объяснения явления интерференции в оптике и при дифракции электронов. Итак, мы видим, что интерференция вероятностей, существование которой необходимо для интерпретации экспериментальных данных, в большой степени зависит от фаз, и, следовательно, фазы играют очень важную роль.

То обстоятельство, что вероятность получить значение β_k величины B , измерив ее непосредственно в начальном состоянии, равна $\left| \sum_i c_i s_{ik} \right|^2$, а не $\sum_i |c_i|^2 |s_{ik}|^2$, может показаться противоречащим теореме об умножении вероятностей. Но на самом деле противоречия нет. Величина $\sum_i |c_i|^2 |s_{ik}|^2$ есть вероятность для того случая, когда сначала измеряется A , а затем B , но она совершенно не обязана быть равной вероятности получить значение β_k величины B при измерении B непосредственно в начальном состоянии, поскольку измерение величины A , несовместимое с измерением величины B , полностью меняет вероятностное состояние.

Некоторые недоразумения в данном вопросе могут возникать из-за того, что, как мы видели, при обычных статистических применениях теории вероятностей допускается, что измерение одной случайной величины (в терминологии статистики — «испытание») никак не сказывается на вероятностях других случайных величин. Такая гипотеза, которая, очевидно, справедлива, когда речь идет о задачах из области макроскопической физики, которыми обычно и занимается статистика, совершенно неприемлема в микрофизике.

Именно этим объясняется невозможность в случае некоммутирующих ве-

личин сконструировать функции $\rho(\alpha, \beta)$, $\rho_B^{(A)}(\alpha, \beta)$, $\rho_A^{(B)}(\alpha, \beta)$, соответствующие той схеме, которую обычно принимают в классической статистике. С этим, в частности, мы и столкнемся, рассматривая попытку такого рода (впрочем, очень интересную), сделанную Бассом [35].

в) *Функция распределения $\rho(x, p_x)$ Вигнера [36] и Басса*

Рассмотрим две канонически сопряженные величины x и p_x . Мы знаем, что они не коммутируют между собой и не могут быть измерены одновременно. Априори можно сказать, что не должно существовать плотности распределения $\rho(x, p_x)$, определяемой обычным образом, поскольку тогда величина $\rho(x, p_x) dx dp_x$ должна была бы быть равна вероятности одновременного нахождения значения x в интервале dx и значения p_x в интервале dp_x . Но определить одновременно x и p_x невозможно, а если проводить измерения этих двух величин последовательно, то первое измерение будет полностью нарушать вероятностное состояние, существовавшее ранее.

Тем не менее Бассу удалось весьма хитроумно подобрать функцию $\rho(x, p_x)$, для которой выполняются условия

$$\int \rho(\alpha, \beta) d\alpha = \rho_B(\beta), \quad \int \rho(\alpha, \beta) d\beta = \rho_A(\alpha).$$

И все же, как мы увидим, нельзя считать, что эта функция дает одновременную вероятность значений α и β .

Чтобы получить функцию Басса, будем рассуждать следующим образом. Возьмем в качестве исходной формулу Арнуса для двух коммутирующих величин

$$\varphi(u, v) = \int \psi^* e^{iuA} e^{ivB} \psi d\tau \quad (67)$$

и попытаемся (от чего благоразумно воздержался Арнус) применить ее к двум некоммутирующим переменным. Мы тотчас же столкнемся со следующей трудностью. Если в случае коммутирующих переменных можно под знаком интеграла писать либо $e^{iuA} e^{ivB}$, либо $e^{ivB/2} e^{iuA} e^{ivB/2}$, поскольку экспоненты, разумеется, коммутируют, то здесь этого, казалось бы, сделать уже нельзя. Но, как нетрудно убедиться, на самом деле эти два выражения оказываются равными, даже если A и B не коммутируют между собой. Например, при $A = x$ и $B = p_x$ мы можем положить (не принимая во внимание зависимость от переменных y, z, \dots)

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \exp\left(i \frac{v}{2} (p_x)_{\text{опер}}\right) \exp(iux) \times \\ \times \exp\left(i \frac{v}{2} (p_x)_{\text{опер}}\right) \psi(x) dx. \end{aligned} \quad (68)$$

Поскольку оператор $\exp\{i(v/2)(p_x)_{\text{опер}}\}$ эрмитов, с учетом свойств операторов

$\exp[\pm i(v/2)(p_x)_{\text{опер}}]$ можно написать

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\exp\left(-i\frac{v}{2}(p_x)_{\text{опер}}\right) \psi^*(x) \right] \exp(iux) \exp\left(i\frac{v}{2}(p_x)_{\text{опер}}\right) \psi(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\left(x + \frac{hv}{4\pi}\right) \exp(iux) \psi\left(x - \frac{hv}{4\pi}\right) dx. \end{aligned} \quad (69)$$

Это и есть выражение для функции, которую можно было бы назвать «характеристической функцией Вигнера — Басса», но которая, как это будет видно далее, в действительности не является истинной характеристической функцией.

Путем обратного преобразования Фурье перейдем к плотности распределения:

$$\rho(x, p_x) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iux) \exp(-ivp_x) \varphi(u, v) du dv \quad (70)$$

[здесь в выражении для экспоненты $\exp(-ivp_x)$ величина p_x — собственное значение, а не оператор $(p_x)_{\text{опер}}$]. Подставляя в эту формулу выражение, полученное выше для $\varphi(u, v)$, находим

$$\begin{aligned} \rho(x, p_x) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\left(w + \frac{hv}{4\pi}\right) \exp(iu(w-x)) \times \\ &\quad \times \exp(-ivp_x) \psi\left(w - \frac{hv}{4\pi}\right) du dv dw. \end{aligned} \quad (71)$$

Но

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(iu(w-x)) du = 2\pi\delta(w-x) = 2\pi \lim_{N \rightarrow \infty} \sin \frac{2\pi N(w-x)}{\pi(w-x)}.$$

Следовательно,

$$\rho(x, p_x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\left(x + \frac{hv}{4\pi}\right) \exp(-ivp_x) \psi\left(x - \frac{hv}{4\pi}\right) dz,$$

и, положив $z = hv/4\pi$, получим

$$\rho(x, p_x) = \frac{2}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{4\pi i}{h} p_x z\right) \psi^*(x+z) \psi(x-z) dz. \quad (72)$$

Это и есть плотность распределения Вигнера — Басса¹⁾.

Мы покажем, что, хотя это выражение и получено путем недостаточно строгих рассуждений, оно удовлетворяет двум условиям:

$$\rho_A(\alpha) = \int \rho(\alpha, \beta) d\beta, \quad \rho_B(\beta) = \int \rho(\alpha, \beta) d\alpha.$$

Здесь мы в силу принципа интерференции имеем $\rho_A(\alpha) = |\psi(x)|^2$. Таким образом, первое из указанных условий имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, p_x) dp_x = |\psi(x)|^2.$$

Напишем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, p_x) dp_x = \frac{2}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{p_x \rightarrow \infty} \left(-\frac{h}{2\pi z} \sin \frac{4\pi}{h} p_x z \right) \right] \times \\ \times \psi(x-z)\psi^*(x+z) dz. \quad (73)$$

Поскольку

$$\delta(u) = \lim_{p_x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2\pi p_x u}{\pi u},$$

мы получим то, что и требовалось доказать:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, p_x) dp_x = \frac{2}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{2z}{h}\right) \psi(x-z)\psi^*(x+z) dz = |\psi(x)|^2, \quad (74)$$

где мы воспользовались свойством δ -функции Дирака, взяв в качестве переменной интегрирования $2z/h$.

Вторая формула, которую необходимо доказать, имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, p_x) dx = |c(p_x)|^2,$$

где $c(p_x)$ — коэффициент перед экспонентой $\exp\{(-2\pi i/h)p_x x\}$ в разложении ψ по нормированным плоским волнам

$$\psi = \int_{-\infty}^{\infty} c(p_x) \frac{\exp\left(-\frac{2\pi i}{h} p_x x\right)}{\sqrt{h}} dp_x.$$

¹⁾ Само собой разумеется, что ρ , вообще говоря, есть функция времени, так как ψ зависит от t . Следовало бы писать $\rho(x, p_x, t)$. — Л. Б.

Обратное преобразование Фурье дает

$$c(p_x) = \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{2\pi i}{h} p_x x\right) \psi(x) dx,$$

откуда

$$|c(p_x)|^2 = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{2\pi i}{h} p_x (\xi - \eta)\right) \psi(\xi) \psi^*(\eta) d\xi d\eta. \quad (75)$$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, p_x) dx = \frac{2}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{4\pi i}{h} p_x z\right) \psi(x-z) \psi^*(x+z) dz dx.$$

Положив $x - z = \xi$ и $x + z = \eta$, получим $D(x, z)/D(\xi, \eta) = 1/2$, так что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, p_x) dx = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{2\pi i}{h} p_x (\xi - \eta)\right) \psi(\xi) \psi^*(\eta) d\xi d\eta = |c(p_x)|^2, \quad (76)$$

что и требовалось доказать.

Несмотря на справедливость выведенных формул, нельзя считать, что функция Вигнера — Басса $\rho(x, p_x)$ дает вероятность одновременно получить значения x и p_x . Если даже не учитывать того обстоятельства, что, как это показали Бор и Гейзенберг, исследовав методы измерения, точное одновременное измерение величин x и p_x невозможно, вместе с Арнусом следует отметить, что функция $\rho(x, p_x)$ не является положительно определенной; она может принимать отрицательные значения, а это не дает возможности интерпретировать ее как плотность распределения.

К тому же функции

$$\rho_B^{(A)}(\alpha, \beta) = \frac{\rho(\alpha, \beta)}{\rho_A(\alpha)}, \quad \rho_A^{(B)}(\alpha, \beta) = \frac{\rho(\alpha, \beta)}{\rho_B(\beta)}$$

больше уже не имеют значения условных вероятностей в обычном смысле. В самом деле, $\rho(\alpha, \beta)$ определяется функцией ψ до какого-либо измерения, и то же самое можно сказать о величинах $\rho_A(\alpha)$ и $\rho_B(\beta)$. Стало быть, величины $\rho_B^{(A)}$ и $\rho_A^{(B)}$ определены в состоянии, предшествующем любым измерениям; таким образом, они не могут давать вероятность значения величины B при известном значении величины A и вероятность значения величины A при известном значении величины B , поскольку первое же проведенное измерение полностью изменит распределение вероятностей, относившееся к неизмеренной величине. Ни с чем таким мы никогда не встречаемся в макроскопической статистике; это соответствует влиянию, оказываемому измерением роста при-

звоника на окружность его груди! В микрофизике же в случае некоммутирующих величин такое положение становится правилом.

В качестве простого примера рассмотрим случай, когда начальное состояние описывается плоской монохроматической волной

$$\psi = c \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} p_x^{(0)} x\right),$$

соответствующей собственному значению $p_x^{(0)}$ оператора p_x . В этом случае измерение величины p_x , проведенное в указанном начальном состоянии, с достоверностью дает значение $p_x^{(0)}$. В противоположность этому измерение координаты x в том же начальном состоянии может с равной вероятностью дать любое значение, поскольку $|\psi|^2 = \text{const}$. Это — хорошо известный результат: при описании частицы плоской монохроматической волной импульс частицы имеет определенное значение, а ее положение является полностью неопределенным. Вычислим плотность распределения Басса $\rho(x, p_x)$ для начального состояния:

$$\begin{aligned} \rho(x, p_x) &= C \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{4\pi i}{h} p_x z\right) \exp\left(\frac{2\pi i}{h} p_x^{(0)}(x+z)\right) \times \\ &\times \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} p_x^{(0)}(x-z)\right) dz = C \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{4\pi i}{h} (p_x^{(0)} - p_x) z\right) dz = C \delta(p_x^{(0)} - p_x), \end{aligned} \quad (77)$$

где C — константа. Такая форма функции $\rho(x, p_x)$ вполне понятна: умножение на δ -функцию говорит о том, что для p_x возможно лишь одно значение, а отсутствие в этом выражении x соответствует тому, что все значения x равновероятны. Но если мы возьмем

$$\rho_{p_x}^{(x)}(p_x) = \frac{\rho(x, p_x)}{\rho_x(x)}, \text{ то получим } C \delta(p_x^{(0)} - p_x).$$

Тем не менее этот результат является ошибочным, так как если мы сначала измерим координату x , чтобы узнать ее точное значение x_0 , то это измерение полностью изменит функцию ψ , которая примет вид $\delta(x - x_0)$, а в этом новом состоянии все значения величины p_x равновероятны. Таким образом, истинная величина $\rho_{p_x}^{(x)}(p_x)$, дающая вероятность значений величины p_x при известном значении x_0 величины x , будет постоянной, и мы видим, что условные вероятности нельзя вычислить по $\rho(x, p_x)$, пользуясь обычными формулами классической статистики.

Если в обычной статистике известна функция $\rho(\alpha, \beta)$, плотность распределения для величин A и B , то любая величина вида $f(\alpha, \beta)$ имеет среднее значение

$$\overline{f(\alpha, \beta)} = \iint f(\alpha, \beta) \rho(\alpha, \beta) d\alpha d\beta. \quad (78)$$

Другими словами, если величина $f(\alpha, \beta)$ измеряется для бесконечного множества систем, каждая из которых характеризуется плотностью распределения вероятностей $\rho(\alpha, \beta)$, то формула (78) дает среднее значение величины f .

В волновой механике наблюдаемая f определяется не числовой функцией, а оператором. Пусть $f(x, (p_x)_{\text{опер}})$ — линейный эрмитов оператор, соответствующий некоторой наблюдаемой. Его среднее значение равно

$$\bar{f} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) f(x, (p_x)_{\text{опер}}) \psi(x) dx.$$

Можно спросить себя, будет ли указанное среднее равно тому, которое можно вычислить с помощью плотности распределения Вигнера — Басса $\rho(x, p_x)$ по формуле

$$\bar{f}_B = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, p_x) \rho(x, p_x) dx dp_x. \quad (79)$$

Это будет справедливо, если f зависит либо только от x , либо только от p_x . В самом деле, в первом случае квантовое среднее таково:

$$\bar{f} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) |\psi(x)|^2 dx,$$

а среднее по Бассу имеет вид

$$\bar{f}_B = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, p_x) dp_x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) |\psi(x)|^2 dx = \bar{f},$$

что следует из свойств функции $\rho(x, p_x)$. Во втором случае квантовое среднее вычисляется по формуле

$$\bar{f} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp'_x c(p'_x) \frac{\exp[(2\pi i/h) p'_x x]}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} dp_x f(p_x) c(p_x) \frac{\exp[-(2\pi i/h) p_x x]}{\sqrt{h}},$$

поскольку

$$f((p_x)_{\text{опер}}) \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} p_x x\right) = f(p_x) \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} p_x x\right),$$

в справедливости чего можно убедиться, разложив $f(p_x)_{\text{опер}}$ в ряд Тейлора. В силу ортогональности плоских волн имеем

$$\bar{f} = \int f(p_x) |c(p_x)|^2 dp_x. \quad (80)$$

Среднее же по Бассу, если учесть свойства функций $\rho(x, p_x)$, таково:

$$\bar{f}_B = \int_{-\infty}^{\infty} f(p_x) dp_x \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, p_x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(p_x) |c(p_x)|^2 dp_x = \bar{f}, \quad (81)$$

что и требовалось доказать.

Но если $f(x, (p_x)_{\text{опер}})$ зависит и от x , и от p_x , то уже оказывается невозможным показать, что $\bar{f}_B = \bar{f}$, так как измерение величины $f(x, p_x)$, вообще говоря, невозможно осуществить одновременно с измерением как x , так и p_x ¹⁾.

Итак, мы видим, что, хотя функция Вигнера — Басса $\rho(x, p_x)$ и обладает некоторыми интересными свойствами, она не аналогична плотности распределения $\rho(\alpha, \beta)$, с которой обычно имеют дело в макроскопической статистике. Для большей ясности остановимся еще на данном вопросе.

Пусть с квантовой системой связаны две некоммутирующие величины A и B , причем $\varphi(\alpha, q)$ и $\chi(\beta, q)$ — отвечающие им собственные функции. Тогда

$$\varphi(\alpha, q) = \int_{-\infty}^{\infty} d(\alpha, \beta) \chi(\beta, q) d\beta. \quad (82)$$

Если разложение волновой функции системы имеет вид

$$\psi(q) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\alpha) \varphi(\alpha, q) d\alpha = \iint_{-\infty}^{\infty} c(\alpha) d(\alpha, \beta) \chi(\beta, q) d\alpha d\beta, \quad (83)$$

то плотности вероятности для A и B в состоянии ψ будут равны

$$\rho_A(\alpha) = |c(\alpha)|^2, \quad \rho_B(\beta) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} c(\alpha) d(\alpha, \beta) d\alpha \right|^2, \quad (84)$$

причем второе выражение соответствует интерференции вероятностей.

Если же измерить сначала величину A , а затем величину B , то по теореме об умножении вероятностей вероятность значений величины B будет равна

$$\rho'_B(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} |c(\alpha)|^2 |d(\alpha, \beta)|^2 d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_A(\alpha) \rho_B^{(A)}(\alpha, \beta) d\alpha, \quad (85)$$

причем $\rho'_B(\beta) \neq \rho_B(\beta)$ и $\rho_B^{(A)}(\alpha, \beta) \neq \rho(\alpha, \beta) / \rho_A(\alpha)$.

¹⁾ См. ниже работы Ивона. — Л. Б.

Если в том случае, когда $A = x$ и $B = p_x$, ввести плотность распределения Вигнера — Басса $\rho(x, p_x)$, то можно написать

$$\rho_X^{(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, p_x) dp_x, \quad \rho_{P_X}(p_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, p_x) dx,$$

но вероятность значения p_x после последовательного измерения x и p_x не будет равна $\rho_{P_X}(p_x)$, и истинную условную вероятность нельзя вычислить по формуле $\rho_{P_X}^X(x, p_x) = \rho(x, p_x)/\rho_X(x)$.

Таким образом, нужно очень осторожно пользоваться функцией Вигнера — Басса в расчетах, иначе, как будет сейчас показано, мы рискуем встретиться с трудностями, аналогичными тем, которые возникают в теории волны-пилота.

г) Плотность распределения Вигнера — Басса $\rho(x, p_x)$ и гидродинамическая интерпретация волновой механики

Существование плотности распределения Вигнера — Басса $\rho(x, p_x)$, обладающей рядом интересных свойств, может снова возродить надежду на то, что окажется возможной гидродинамическая интерпретация волновой механики.

Рассмотрим жидкость, состоящую, согласно представлениям классической механики, из бесчисленного множества частиц, которые в каждый момент времени имеют вполне определенное положение и вполне определенную скорость. Для простоты будем рассматривать одномерный случай, что не приведет к ограничению общности, поскольку это эквивалентно тому, чтобы рассматривать только проекцию координат и скоростей жидкости на одну из осей. Тогда можно ввести функцию $\rho_X(x, t)$, равную вероятности того, что в момент времени t координата частицы окажется в интервале от x до $x + dx$, а также функцию $\rho_{P_X}(p_x, t)$, равную вероятности того, что в момент времени t значение величины p_x окажется в интервале от p_x до $p_x + dp_x$. Можно также определить функцию $\rho(x, p_x, t)$, такую, что произведение $\rho(x, p_x, t) dx dp_x$ будет равно вероятности одновременно найти x и p_x в указанных интервалах. Получим

$$\begin{aligned} \rho_X(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, p_x, t) dp_x, \\ \rho_{P_X}(p_x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, p_x, t) dx. \end{aligned} \tag{86}$$

Можно ввести также функции

$$\rho_X^{(P)}(x, p_x, t) = \frac{\rho(x, p_x, t)}{\rho_X(x)}, \quad \rho_{P_X}^{(X)}(x, p_x, t) = \frac{\rho(x, p_x, t)}{\rho_{P_X}(p_x)},$$

т. е. плотность распределения координат частиц, для которых в момент времени t величина p_x известна, и плотность распределения импульсов частиц, которые в момент t проходят через известную заданную точку x . Если очень большое число частиц взаимодействует между собой таким образом, что в каждый момент времени их положения и скорости зависят от положений и скоростей других частиц, то вполне понятно, что значение функции $\rho(x, p_x, t)$ в точке (x, p_x) зависит от значений этой функции при других значениях x и p_x . Но такая зависимость была бы совершенно непонятной, если бы частицы не взаимодействовали между собой и испытывали лишь действие внешних сил.

Теперь, вместо того чтобы рассматривать жидкость, состоящую из бесконечного числа частиц, рассмотрим одну частицу, движение которой носит случайный характер. В такой ситуации мы тоже можем ввести различные рассмотренные выше функции ρ , но теперь, по-видимому, значение функции $\rho(x, p_x, t)$ в точке x и p_x уже не может зависеть от значений этой функции в других точках пространства x, p_x , поскольку эти ее значения при x и p_x , отличных от тех, которые соответствуют мгновенному локальному состоянию частицы, отвечают нереализовавшимся возможностям, которые как таковые не могут влиять на состояние частицы.

Как мы знаем, формализм волновой механики должен быть применим и к одной частице. Чтобы это было совместимо с представлением о том, что частица движется по траектории и, следовательно, в каждый момент времени занимает определенное положение и имеет определенную скорость, соответствующая функция $\rho(x, p_x, t)$ в момент времени t должна зависеть только от вероятностей значений x и p_x рассматриваемой частицы. Но плотность Вигнера — Басса

$$\rho(x, p_x, t) = \frac{2}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{4\pi i}{h} p_x z\right) \psi^*(x+z) \psi(x-z) dz \quad (87)$$

вследствие интегрирования по переменной z зависит от всех значений функции ψ , а стало быть, и от $|\psi|^2$. Таким образом, значение функции $\rho(x, p_x, t)$ в данной точке x зависит от вероятности присутствия частицы во всех точках оси Ox .

Данное обстоятельство, вполне аналогичное тем трудностям, с которыми мы уже встречались в теории волны-пилота (движение частицы зависело от вероятности присутствия частицы в начальный момент во всех точках пространства), по-видимому, не дает какой-либо возможности видеть в функции Вигнера — Басса пути возврата к классическим представлениям о движении частицы, помимо других известных нам затруднений¹⁾.

¹⁾ Луи де Бройль, несомненно, существенно изменил бы это свое высказывание, поскольку его критические замечания здесь в действительности относятся лишь к теории волны-пилота, но не затрагивают теории двойного решения. В самом деле, к недопустимому выводу о том, что «мгновенное локальное состояние», зависит от «нереализовавшихся возможностей», мы приходим, если вводим функцию $\rho(x, p_x, t)$, определяе-

Несколько лет назад Верле и Дедебан разработали «Вероятностную механику», опирающуюся на свойства случайных функций; основы этой теории были, в частности, изложены Бассом в необычайно изящной статье [38].

В вероятностной механике в явной форме не постулируется, что «случайная» частица в каждый момент времени занимает определенное положение и движется с определенной скоростью; здесь вводятся лишь плотности распределения координат и составляющих скорости, которые рассматриваются как случайные переменные, причем предполагается, что скорость есть случайная производная координаты, и дается соответствующее определение случайной производной. Эта очень интересная теория, несомненно, может быть применена к движению жидкостей, рассматриваемых с макроскопической точки зрения без предположения о том, что координаты частиц являются дифференцируемыми функциями времени, предположения, необходимого для того, чтобы определить скорость с помощью обычной операции дифференцирования. Но эта теория, по-видимому, не применима к волновой механике, поскольку основывается на обычной схеме классической статистики и, в частности, предполагает существование совместимой плотности распределения $\rho(x, v_x)$, позволяющей находить условные распределения, что, как мы видели, в волновой механике уже недопустимо.

Самое большее, законы случайной механики могут быть применены к движению фиктивной вероятностной жидкости, рассматриваемой в волновой механике. Но, как мы видели, уравнения движения этой фиктивной жидкости, позволяющие следить за эволюцией во времени вероятности присутствия, отнюдь не эквивалентны волновой механике, поскольку в них не учитывается

мую на основе чисто вероятностной волны ψ . Но мы не приходим к подобному выводу, если будем иметь в виду физическую волну, обладающую сингулярностью; в этом случае можно сказать, что воздействия, которым подвергается сингулярная область, есть не что иное, как воздействия, испытываемые всей волной v , на распространение которой оказывают влияние различные силовые поля и различные препятствия, которые, действуя на нее, через ее посредство изменяют *направление и скорость* движения сингулярной области. Таким образом, в теории двойного решения неприемлемое представление о частице, которая «пилотируется» неким распределением вероятностей осуществления событий, заменяется представлением о сингулярности, составляющей одно целое с физической волной, которая в каком-то смысле «ощупывает» окружающее пространство и передает соответствующую информацию сингулярности, направляя ее движение. Именно поэтому сингулярность, проходя через одно из отверстий в опыте Юнга, «знает» о существовании другого отверстия и в связи с этим движется с большей вероятностью к одной из светлых полос, нежели к темной полосе, чем и объясняется интерференция одиночных квантов (см. работы [II, 26, 29], а также статью Фера [37]). Точно так же, когда де Бройль критикует теорию волны-пилота за то, что в ней движение частицы зависит от «вероятности присутствия в начальный момент», эта критика теряет силу, если частица связана с физической, а не с вероятностной волной. Тогда движение частицы зависит не от некоего распределения вероятностей, а от ее собственных начальных условий, а также от *начальных условий волны*, которая направляет ее движение. — Ж. Л.

обобщенный принцип спектрального разложения, а также не принимается во внимание особая роль процесса измерения в волновой механике¹⁾.

В своей статье Басс вводит скорость, связанную с заданной точкой пространства, которая в схеме классической статистики соответствует средней скорости в случае, когда известно положение частицы. Таким образом, в одномерном случае принимается, что

$$\hat{v}_x(x, t) = \int v_x \rho_V^{(X)}(v_x, x, t) dv_x, \quad (88)$$

где \hat{v}_x — средняя скорость по Бассу в точке x в момент t . Поскольку, согласно классической статистике,

$$\rho_V^{(X)}(v_x, x, t) = \rho(v_x, x, t) / \rho_X(x, t),$$

мы имеем

$$\hat{v}_x(x, t) = \frac{\int v_x \rho(v_x, x, t) dv_x}{\rho_X(x, t)}. \quad (89)$$

Если предположить, что каждая из частиц имеет свою траекторию, то $\hat{v}_x(x, t)$ будет средней скоростью частиц, проходящих в момент времени t через точку x ²⁾.

¹⁾ Как мы уже знаем, в дальнейшем де Бройль смог ответить на это возражение, перестроив теорию измерений и выделив в волновой механике три вида вероятностей (фактические, предсказываемые и скрытые). — Ж. Л.

²⁾ Пусть p_g — импульс ведения, а v_g — скорость ведения. Тогда

$$p_g = \int p_x \rho(x, p_x) dx dp_x / |\psi|^2,$$

$$\bar{p}_g = \int |\psi|^2 p_g dx = \int dx \int dp_x p_x \rho(x, p_x) = \int p_x |c(p_x)|^2 dp_x,$$

$$\text{или } \bar{v}_g = \int v_x |c(v_x)|^2 dv_x.$$

Средний импульс ведения равен среднему взвешенному значению p_x с весовым множителем $|c(p_x)|^2$. Если $c(p_x)$ не зависит от времени, то выполняется закон сохранения усредненного по пространству импульса ведения. — Л. Б.

Данное примечание автора, сделанное карандашом, имеет более важное значение, чем может показаться на первый взгляд. В самом деле, хотя формально оно, казалось бы, не содержит ничего нового по сравнению с основным текстом, здесь впервые появляется термин «ведение» (guidage), характерный для теории двойного решения. Другими словами, автор здесь имеет в виду уже не фиктивную, а физическую волну, что говорит о существенном концептуальном различии между основным текстом и данным примечанием. — Ж. Л.

В своем примечании Луи де Бройль, так же как и в теории двойного решения, для обозначения понятий, выражаемых в русском языке словами управление, ведение, пилотирование и т. д., употребляет слово guidage вместо обычно используемого им в теории волны-пилота слова pilotage. — Прим. перев.

Попробуем применить это к вероятностной жидкости волновой механики, приняв, что $v_x = (1/m)p_x$ и что $\rho(x, p_x, t)$ определяется по формуле Басса. Тогда

$$\rho_x(x, t) = |\psi(x, t)|^2,$$

$$\rho(x, p_x, t) = \frac{2}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{4\pi i}{h} p_x z\right) \psi^*(x+z) \psi(x-z) dz, \quad (90)$$

откуда

$$\hat{v}_x(x, t) = \frac{1}{|\psi|^2} \frac{2}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_x}{m} \exp\left(-\frac{4\pi i}{h} p_x z\right) \psi^*(x+z) \psi(x-z) dz dp_x. \quad (91)$$

Но

$$p_x \exp\left(-\frac{4\pi i}{h} p_x z\right) = -\frac{d}{dz} \left[\frac{h}{4\pi i} \exp\left(-\frac{4\pi i}{h} p_x z\right) \right],$$

так что после интегрирования по частям (с учетом того, что ψ на бесконечности обращается в нуль) получаем

$$\begin{aligned} \rho \hat{v}_x(x, t) &= \frac{1}{2\pi i m} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{4\pi i}{h} p_x z\right) \frac{d}{dz} [\psi^*(x+z)(x-z)] dz dp_x, \\ &= \frac{1}{2\pi i m} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{4\pi i}{h} p_x z\right) \left[\psi(x-z) \frac{d}{dx} \psi^*(x+z) - \psi^*(x+z) \frac{d}{dx} \psi(x-z) \right] dp_x dz. \end{aligned} \quad (92)$$

Но

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{4\pi i}{h} p_x z\right) dp_x = \frac{h}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iuz) du = \frac{h}{4\pi} 2\pi \delta(z) = \frac{h}{2} \delta(z),$$

так что окончательно

$$\rho \hat{v}_x(x, t) = -\frac{h}{4\pi i m} \left[\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right] \quad (\rho = |\psi|^2). \quad (93)$$

Таким образом, здесь скорость по Бассу совпадает со скоростью фиктивной вероятностной жидкости (см. определение вектора тока вероятности \mathbf{f} на

с. 213). Это та скорость, которая в теории волны-пилота приписывалась частице.

Введя условную скорость \mathbf{v} , Басс показал, что в вероятностной механике для трехмерной жидкости выполняется закон сохранения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

В применении к вероятностной жидкости волновой механики это соответствует закону сохранения вероятностной жидкости, так как по своему определению скорость v совпадает со скоростью этой фиктивной жидкости. Случайная механика, по-видимому, может быть применена для описания движения вероятностной жидкости волновой механики, но мы знаем, что этого далеко не достаточно для учета новых представлений последней. Все подобного рода попытки классической интерпретации волновой механики неизменно ограничиваются гидродинамическим аспектом этой теории (состоящим в описании движения вероятностной жидкости), но упускают саму суть новых представлений волновой механики¹⁾.

Сделаем еще одно замечание. Формула, определяющая \hat{v}_x ,

$$\rho \hat{v}_x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_x}{m} \rho(x, p_x, t) dp_x, \quad (94)$$

где $\rho = |\psi|^2$, а $\rho(x, p_x, t)$ — функция Вигнера — Басса, дает нам возможность написать соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho \hat{v}_x dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_x}{m} \rho(x, p_x, t) dp_x dx. \quad (95)$$

Но, поскольку p_x/m зависит только от p_x , выражение в правой части, согласно установленным выше свойствам функции Вигнера — Басса, равно квантовому среднему величины p_x/m :

$$\frac{\bar{p}_x}{m} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) \left(\frac{p_x}{m} \right)_{\text{опер}} \psi(x, t) dx.$$

¹⁾ Это совершенно не так! Но де Бройль в то время еще не знал, что сам он вскоре поймет и покажет, что вся эта схема должна основываться не на вероятностной волне ψ , а на физической волне v , и что тогда (благодаря своей теории измерений) он сможет найти в новой форме то, что он здесь называет «сутью новых представлений волновой механики», а именно влияние измерительного прибора на значения наблюдаемых величин [II, 27]. — Ж. Л.

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho \hat{v}_x dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_x}{m} \rho(x, p_x, t) dp_x \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\psi^* \frac{(p_x)_{\text{опер}}}{m} \psi \right] dx.$$

Следовательно, можно написать (хотя это и не является строгим следствием из предыдущего уравнения)

$$\rho \hat{v}_x(x, t) = \psi^*(x, t) \frac{(p_x)_{\text{опер}}}{m} \psi(x, t). \quad (96)$$

Величину $\psi^*(x, t)[(p_x)_{\text{опер}}/m]\psi(x, t)$ часто называют плотностью среднего значения величины p_x/m в волновой механике, поскольку в результате интегрирования этого выражения по пространственным переменным мы получим среднее значение.

Согласно последнему уравнению, должно выполняться равенство

$$\rho \hat{v}_x = - \frac{h}{2\pi i m} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

что не соответствует формуле (93). Но мы можем также, очевидно, положить

$$\rho \hat{v}_x(x, t) = \psi^*(x, t) \frac{(p_x)_{\text{опер}}}{m} \psi(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} f(x), \quad (97)$$

если только $f(\pm \infty) = 0$. Два полученных выражения для $\rho \hat{v}_x$ различаются лишь на величину $(h/4\pi i m)(\partial/\partial x)(\psi\psi^*)$. Поэтому в интегральном отношении они эквивалентны между собой, так как интегрирование по пространственным переменным в обоих случаях дает один и тот же результат.

В волновой механике реальный физический смысл имеют лишь интегралы, дающие средние значения; плотности же в этих интегралах определяются с точностью до дивергенции и носят фиктивный характер. На это обстоятельство я неоднократно обращал внимание в своих курсах волновой механики. Физический смысл в волновой механике имеет интеграл $\int_D \psi^* A \psi d\tau = \bar{A}$, а не $\psi^* A \psi$ (исключение — случай $A \equiv 1$, в котором $|\psi|^2$ приобретает физический смысл). Компоненты вектора тока вероятностной жидкости определяются заданием плотности, и именно поэтому указанная жидкость носит фиктивный характер¹⁾.

¹⁾ Вскоре в связи с построением теории двойного решения Луи де Бройль изменил свою точку зрения и стал приписывать этой жидкости физический смысл, рассматривая волну v [II, 26]. Как это часто бывает в теоретической физике, автор излагает здесь теорию, которую он считает «чисто математической», но которая позже для него наполнится реальностью благодаря новой физической интерпретации. Напомним, что именно так Фарадей ввел понятие поля: сначала он просто рисовал силовые линии, но теория возникла с того момента, когда он стал считать, что эти линии соответствуют действительности. — Ж. Л.

д) Работы Ж. Ивона

Ивону принадлежат интересные работы [39], относящиеся почти к тому же вопросу, который рассматривался у Басса. Я не буду касаться деталей работ Ивона, которые с математической точки зрения очень красивы. Приведу лишь одну теорему Ивона, которую он, несомненно, доказал с тайной надеждой свести формализм волновой механики к обычному формализму классической статистики.

Обозначим символом θ оператор $-\partial^2/\partial x \partial p_x$. Пусть G — линейный эрмитов оператор, соответствующий измеряемой величине G . Положим

$$\gamma(x, p_x) = \exp\left(\frac{ih}{4\pi}\theta\right) \left[\exp\left(\frac{2\pi i}{h} p_x x\right) G \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} p_x x\right) \right], \quad (98)$$

где $\gamma(x, p_x)$ — некая функция переменных x и p_x , а G — оператор, выражающийся через операторы $x_{\text{опер}}$ и $(p_x)_{\text{опер}}$. Всякому оператору G , а следовательно, и всякой наблюдаемой можно поставить в соответствие функцию $\gamma(x, p_x)$. Тогда можно доказать следующую теорему Ивона.

Теорема. Квантовое среднее

$$\bar{G} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) G \psi(x) dx$$

можно найти как среднее функции $\gamma(x, p_x)$, соответствующей оператору G , вычисленное на основе плотности распределения Вигнера — Басса.

Другими словами,

$$\bar{G} = \iiint_{-\infty}^{\infty} \gamma(x, p_x) \rho(x, p_x, t) dx dp_x.$$

Мы непосредственно убедимся в правильности этой формулы, которую Ивон вывел путем остроумных преобразований. Пусть \bar{G} определяется последней формулой. Тогда

$$\begin{aligned} \bar{G} = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{ih}{4\pi}\theta\right) \left[\exp\left(\frac{2\pi i}{h} p_x x\right) G \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} p_x x\right) \right] \times \\ & \times \frac{2}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{4\pi i}{h} p_x z\right) \psi^*(x+z) \psi(x-z) dx dp_x dz. \quad (99) \end{aligned}$$

Интегрирование по частям по x и p_x дает

$$\begin{aligned} \bar{G} = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{h} \exp\left(\frac{2\pi i}{h} p_x x\right) G \left[\exp\left(-\frac{2\pi i}{h} p_x x\right) \right] \times \\ & \times \exp\left(\frac{ih}{4\pi}\theta\right) \left[\exp\left(-\frac{4\pi i}{h} p_x z\right) \psi^*(x+z) \psi(x-z) dx dp_x dz. \quad (100) \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{i\hbar}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x \partial p_x}\right) \left[\exp\left(-\frac{4\pi i}{\hbar} p_x z\right) F(x, z) \right] = \\ = \exp\left(-\frac{4\pi i}{\hbar} p_x z\right) F(x - z, z), \quad (101) \end{aligned}$$

в чем легко убедиться, разложив экспоненциальный оператор в ряд. Таким образом,

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{i\hbar}{4\pi} \theta\right) \left[\exp\left(-\frac{4\pi i}{\hbar} p_x z\right) \psi^*(x + z)\psi(x - z) \right] = \\ = \exp\left(-\frac{4\pi i}{\hbar} p_x z\right) \psi(x - 2z)\psi^*(x), \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{G} = \frac{2}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[G \exp\left(-\frac{2\pi i}{\hbar} p_x x\right) \right] \times \\ \times \exp\left(\frac{2\pi i}{\hbar} p_x (x - 2z)\right) \psi(x - 2z)\psi^*(x) dx dp_x dz. \quad (102) \end{aligned}$$

Возьмем в качестве новых переменных x , p_x и $u = x - 2z$. Тогда

$$\frac{D(x, p_x, z)}{D(x, p_x, u)} = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} \bar{G} = \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \left[G \exp\left(-\frac{2\pi i}{\hbar} p_x x\right) \right] \times \\ \times \exp\left(\frac{2\pi i}{\hbar} p_x u\right) \psi(u) dx dp_x du. \quad (103) \end{aligned}$$

Если разложение функции $\psi(u)$ имеет вид интеграла Фурье

$$\psi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} c(p_x) \exp\left(-\frac{2\pi i}{\hbar} p_x u\right) dp_x,$$

то формула обратного преобразования Фурье дает

$$c(p_x) = \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{2\pi i}{\hbar} p_x u\right) \psi(u) du.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \bar{G} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) G \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} p_x x\right) c(p_x) dp_x dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) G \psi(x) dx, \end{aligned} \quad (104)$$

что и требовалось доказать.

Этот результат, полученный Ивоном, очень красив и может оказаться очень полезным, но его нельзя считать доказательством того, что возможна интерпретация классического типа волновой механики. То, что среднее \bar{G} можно вычислить по известной функции ψ , следует уже из самого определения $\bar{G} = \int_D \psi^* G \psi d\tau$. Формула Ивона дает другой способ вычисления этого среднего значения, который похож на классический способ, пригодный в том случае, когда существует истинная плотность совместного распределения $\rho(x, p_x, t)$. Функция, для которой вычисляется классическое среднее, — это не функция $G(x, p_x)$, соответствующая классически наблюдаемой G , а новая функция $\gamma(x, p_x)$, которая выражается через квантовомеханический оператор $G(x, (p_x)_{\text{опер}})$.

В связи с этим сделаем некоторые замечания. Оператор $\exp\{i(h/4\pi)\theta\}$, примененный к функции только координаты x или только импульса p_x , дает саму эту функцию, например:

$$\left[1 + \frac{i\hbar}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x \partial p_x} + \dots + \left(\frac{i\hbar}{4\pi}\right)^n \frac{\partial^{2n}}{\partial x^n \partial p_x^n} + \dots \right] f(x) = f(x).$$

Таким образом, функция G сводится к $f(x)$, что возможно в волновой механике; если же G сводится к $f(p_x)$, с чем мы не встречаемся в волновой механике, ибо там p_x в выражении для G всегда является оператором, то мы имеем

$$\begin{aligned} \gamma(x, p_x) &= \exp\left(\frac{i\hbar}{4\pi}\theta\right) \left[\exp\left(\frac{2\pi i}{h} p_x x\right) G \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} p_x x\right) \right] = \\ &= G = \begin{cases} f(x) \\ f(p_x) \end{cases}. \end{aligned} \quad (105)$$

В этом случае $\gamma(x, p_x)$ совпадает с $G(x, p_x)$ и среднее по Ивону совпадает с классическим средним. Но дело обстоит иначе, если G — функция обеих переменных x и p_x . Если даже рассматривать величину p_x в выражении для G как обыкновенную переменную (что в волновой механике неверно), то $\gamma(x, p_x)$ сводится к $G(x, p_x)$ лишь в том случае, когда $G = f(x) + \phi(p_x)$. Это тем более справедливо, когда величина p_x в выражении для G является оператором, как это и должно быть в волновой механике. Здесь опять приложимо все сказанное на с. 250 по поводу плотности распределения Вигнера — Басса.

Впрочем, нетрудно видеть, что если

$$G = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(x, p_x) \rho(x, p_x, t) dx dp_x,$$

то, вообще говоря, не выполняется формула

$$G^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma^2(x, p_x) \rho(x, p_x, t) dx dp_x,$$

которая должна была бы выполняться, если бы функция $\rho(x, p_x, t)$ была истинной плотностью совместного распределения величин x и p_x . Рассмотрим, например, оператор

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2} [x(p_x)_{\text{опер}} + (p_x)_{\text{опер}}x] = -\frac{\hbar}{4\pi i} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} x \right) = \\ &= -\frac{\hbar}{2\pi i} \left(x \frac{1}{\partial x} + \frac{1}{2} \right), \end{aligned} \quad (106)$$

получаемый путем симметризации классического выражения $x p_x$. Такой оператор G эрмитов и может соответствовать некоей измеряемой величине. Найдем функцию $\gamma(x, p_x)$, соответствующую этому оператору G . Прежде всего имеем

$$\exp\left(\frac{2\pi i}{\hbar} p_x x\right) G \exp\left(-\frac{2\pi i}{\hbar} p_x x\right) = x p_x - \frac{\hbar}{4\pi i};$$

далее,

$$\begin{aligned} \gamma(x, p_x) &= \exp\left(\frac{i\hbar}{4\pi} \theta\right) \left[\exp\left(\frac{2\pi i}{\hbar} p_x x\right) G \exp\left(-\frac{2\pi i}{\hbar} p_x x\right) \right] = \\ &= \exp\left(\frac{i\hbar}{4\pi} \theta\right) \left(x p_x - \frac{\hbar}{4\pi} \right) = x p_x - \frac{i\hbar}{4\pi} - \frac{\hbar}{4\pi i} = x p_x. \end{aligned} \quad (107)$$

Рассмотрим теперь оператор (тоже эрмитов)

$$G^2 = -\frac{\hbar^2}{4\pi^2} \left[x \frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{4} \right]. \quad (108)$$

Очевидно, что

$$\exp\left(\frac{2\pi i}{\hbar} p_x x\right) G^2 \exp\left(-\frac{2\pi i}{\hbar} p_x x\right) = p_x^2 x^2 - 2 \frac{\hbar}{2\pi i} p_x x - \frac{\hbar^2}{16\pi^2}, \quad (109)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \gamma_2(x, p_x) &= \exp\left(\frac{ih}{4\pi}\theta\right) \left[p_x^2 x^2 - 2 \frac{ih}{2\pi i} p_x x - \frac{h^2}{16\pi^2} = \right. \\ &= p_x^2 x^2 - \frac{ih}{4\pi} 4p_x + \frac{4}{2} \left(\frac{ih}{4\pi}\right)^2 - \\ &\left. - 2 \frac{h}{2\pi i} p_x x + 2 \frac{h}{2\pi i} \frac{ih}{4\pi} - \frac{h^2}{16\pi^2} = p_x^2 x^2 + \frac{h^2}{16\pi^2} \right]. \quad (110) \end{aligned}$$

Таким образом, равенство $\gamma_2(x, p_x) = [\gamma(x, p_x)]^2$ не выполняется.

Итак, сколь бы ни были изящны и интересны в математическом отношении рассмотренные выше исследования, они отнюдь не устраняют принципиального различия между формализмом волновой механики и классическим формализмом. Это различие проистекает из весьма замечательных физических положений, вскрытых квантовой теорией, таких, как невозможность одновременного измерения двух канонически сопряженных (или, в более общем случае, некоммутирующих) величин, создание нового вероятностного состояния актом измерения, интерференция вероятностей, стирание информации о фазах актом измерения. Все это не имеет аналогии в классических теориях и не может быть описано методами классической статистики, в которой измерение (испытание) рассматривается как простая констатация.

[Какой-либо возврат к классическому описанию микроскопических явлений представляется невозможным. Именно это вытекает из красивых результатов фон Неймана и, в частности, из его теории измерений. Перейдем теперь к их изложению¹⁾.]

¹⁾ Текст, заключенный в квадратные скобки, автор по очевидным соображениям в дальнейшем зачеркнул и сделал пометку карандашом «Диссертация Бодью». Имеется в виду Ж. Бодью, диссертация которого (1949 г.), оппонируемая Луи де Бройлем, называлась «Исследования по основам квантового исчисления вероятностей для чистых состояний». К вычеркнутому тексту автор сделал, несомненно гораздо позже, следующее примечание, которое может показаться несколько загадочным, но которое на самом деле таковым не является и которое мы легко объясним. — Ж. Л.

Применение обычной схемы классической статистики к теории волны-пилота

$$\begin{aligned} \rho_X(x) &= |\psi(x)|^2, & \psi &= ae^{i\varphi} \\ \rho_{V_x}^X(v_x) &= \delta\left(v_x + \frac{h}{2\pi m} \frac{d\varphi}{dx}\right) & \mathbf{v} &= -\frac{h}{2\pi m} \text{grad } \varphi \\ \rho(x, v_x) &= \rho_X(x) \rho_{V_x}^{(X)}(v_x) = |\psi(x)|^2 \delta\left(v_x + \frac{h}{2\pi m} \frac{d\varphi}{dx}\right). \end{aligned}$$

Можно убедиться, что

$$\int \rho(x, v_x) dv_x = |\psi(x)|^2 = \rho_X(x).$$

Таким образом, должно выполняться равенство

$$\begin{aligned} \rho_{V_x}(v_x) &= \int \rho(x, v_x) dx = \\ &= \int |\psi(x)|^2 \delta \left(v_x + \frac{h}{2\pi m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx = \sum_i |\psi(x_i)|^2, \end{aligned}$$

где x_i — решение уравнения $-(h/2\pi m)(\partial \varphi / \partial x) = v_x$ и

$$\begin{aligned} \rho_X^{(V_x)}(x) &= \frac{\rho(x, v_x)}{\rho_{V_x}(v_x)} = \\ &= \frac{|\Psi(x)|^2 \left(v_x + \frac{h}{2\pi m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)}{\int |\psi(x)|^2 \delta \left(v_x + \frac{h}{2\pi m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx} \end{aligned}$$

Имеем также

$$\bar{v}_x(x, t) = \int \left(v_x + \frac{h}{2\pi m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dv_x = - \frac{h}{2\pi m} \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad \text{— Л. Б.}$$

Прежде всего отметим, что приведенные выше формулы (с небольшой разницей в записи) рассмотрены на с. 89 — 93 работы автора «Теория измерений в волновой механике» [11, 27] и что они применимы как в теории двойного решения, так и в теории волны-пилота. Речь здесь идет о *скрытой* статистической схеме, опирающейся на два постулата:

1. В любой момент частица предполагается локализованной в некоторой точке волны; а эта точка нам не известна, но плотность вероятности обнаружить частицу в точке x (т. е. получить значение x величины X) считается равной $|\psi(x)|^2$.

2. Если частица находится в некой точке x , то ее скорость считается равной $(-h/2\pi m) \text{grad } \varphi$, где φ — фаза волны. Данное предположение есть не что иное, как постулат ведения (guidage): *условная вероятность* того, что при известном значении $X = x$ скорость будет соответствовать формуле ведения, *равна единице*.

В свете этих постулатов становятся очевидными приведенные де Бройлем выражения для двух первых плотностей вероятностей $\rho_X(x)$ и $\rho_{V_x}^{(X)}(v_x)$. Что касается других выражений, то они выводятся с помощью общей схемы, изложенной выше в главе «Основные понятия теории вероятностей».

Не следует забывать, однако, что здесь речь идет пока еще только о скрытой схеме, так как если вероятность положения по-прежнему допускает прямую проверку (это — *фактическая* вероятность), то в противоположность этому плотность вероятности, относящаяся к скорости, вообще говоря, оказывается скрытой, поскольку во всех состояниях, кроме некоторых особых, скорость ведения не является наблюдаемой (это *скрытый* параметр) и не соответствует результатам измерений. Таким образом, остается еще разъяснить, каким путем из этой схемы можно вывести обычную вероятностную схему квантовой механики, относящуюся к измерению импульса; Лун де Бройль сделал это позднее на указанных выше страницах книги по теории измерений. — Ж. Л.

Глава XIV

Теория смешанных состояний и теория измерений фон Неймана¹⁾

1. ЧИСТЫЕ И СМЕШАННЫЕ СОСТОЯНИЯ

Сначала еще раз вернемся к вопросу об интерференции вероятностей. Пусть имеется очень большое число систем, находящихся в одном и том же состоянии ψ , и пусть A — физическая величина, измеряемая на опыте, которой соответствуют собственные значения α_k и собственные функции φ_k . Если $\psi = \sum_k c_k \varphi_k$, то при измерении величины A для $|c_1|^2 \mathcal{N}$ систем мы получим значение α_1 , для $|c_2|^2 \mathcal{N}$ систем — значение α_2, \dots . Среднее значение величины A будет равно $\sum_k |c_k|^2 \alpha_k$.

Предположим теперь, что, вместо того чтобы иметь \mathcal{N} систем в одном и том же состоянии, мы имеем $|c_1|^2 \mathcal{N}$ систем в состоянии φ_1 , $|c_2|^2 \mathcal{N}$ систем в состоянии φ_2, \dots . Тогда измерение величины A даст нам те же самые результаты и то же самое среднее значение, что и в первом случае. Поэтому можно подумать, что эти два случая эквивалентны.

Но это неверно. В самом деле, рассмотрим наблюдаемую величину B , не коммутирующую с A . Собственные функции оператора B не совпадают с собственными функциями оператора A , и, если β_k и χ_k — собственные значения и собственные функции оператора B , мы имеем $\varphi_k = \sum_l d_{kl} \chi_l$, причем, вообще говоря, сумма содержит несколько слагаемых.

Рассмотрим случай, когда все \mathcal{N} систем находятся в одном и том же состоянии

$$\psi = \sum_k c_k \varphi_k = \sum_{k,l} c_k d_{kl} \chi_l.$$

¹⁾ См. [40, 41]. Напомним также еще раз о работе Луи де Бройля [II, 27] по теории измерений, где изложена теория фон Неймана и проведен ее детальный критический анализ, чего здесь нет, поскольку здесь дается пока еще ортодоксальное изложение. Тем не менее мы увидим, как появляется критика в примечаниях, добавленных позже, и даже в первоначальном тексте уже вырисовывается личная интерпретация автора, предвещающая его будущую теорию. Мы укажем на это в соответствующих местах. — Ж. Л.

Тогда измерение величины B для всех этих систем даст

$$\mathcal{N} \left| \sum_k c_k d_{kl} \right|^2 \text{ раз}$$

значение β_l , а среднее значение величины B будет равно $\sum_l \left| \sum_k c_k d_{kl} \right|^2 \beta_l$, что можно также переписать в виде $\sum_{k,l} c_k c_l B_{kl}$, поскольку эта величина равна

$$\int \psi^* B \psi d\tau = \sum_{k,l} c_k^* c_l \int \varphi_k B \varphi_l d\tau.$$

Теперь рассмотрим другой случай, когда имеется $\mathcal{N} |c_1|^2$ систем в состоянии φ_1, \dots . Измерение величины B для $\mathcal{N} |c_1|^2$ первых систем даст для $|d_{1l}|^2$ из них значение β_l . В итоге значение β_l величины B мы получили $\mathcal{N} \sum_k |c_k|^2 |d_{kl}|^2$ раз, и, следовательно, среднее значение величины B будет равно $\sum_{k,l} |c_k|^2 |d_{kl}|^2 \beta_l$ т. е. $\sum_k |c_k|^2 B_{kk}^{(\varphi)}$, т. е. $\sum_k |c_k|^2 \int \varphi_k^* B \varphi_k d\tau$.

Таким образом, мы видим, что, какова бы ни была величина B , не коммутирующая с A , два рассмотренных случая совершенно не идентичны. В первом случае мы имеем интерференцию вероятностей, во втором случае она отсутствует, поэтому нельзя считать, что \mathcal{N} систем в состоянии ψ составляют то, что в теории вероятностей называется статистическим ансамблем, содержащим $\mathcal{N} |c_1|^2$ систем, для которых величина A имеет собственное значение α_1 , и т. д. Это видно, впрочем, и из того, что можно было бы также рассматривать \mathcal{N} систем как ансамбль, $\mathcal{N} |d_1|^2$ систем которого имеют собственные значения β_l для величины B , и т. д., причем $d_1 = \sum_k c_k d_{k1}$, и этот второй ансамбль не совпадал бы с первым. Поэтому невозможно свести совокупность \mathcal{N} систем, находящихся в состоянии ψ , к определенному статистическому ансамблю, поскольку ансамбль будет меняться в зависимости от того, какая рассматривается величина A . Состояние ψ представляет собой то, что фон Нейман называет «чистым состоянием», которое не разлагается, как «смешанное состояние», поскольку не является статистическим ансамблем в обычном смысле теории вероятностей.

В противоположность этому можно рассматривать \mathcal{N}_1 систем, описываемых волновой функцией $\psi^{(1)}$, \mathcal{N}_2 систем, описываемых волновой функцией $\psi^{(2)}$, и т. д. Совокупность таких систем представляет собой смешанное состояние из \mathcal{N}_1 чистых состояний с волновой функцией $\psi^{(1)}$, \mathcal{N}_2 чистых состояний с волновой функцией $\psi^{(2)}$, \dots . Мы получим наш второй случай, положив $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N} |c_1|^2, \dots$

Пусть $\mathcal{N}_i / \mathcal{N} = p_i$. Наше смешанное состояние будет определяться совокупностью значений p_i , причем будет выполняться равенство $\sum p_i = 1$. Величины p_i можно, если угодно, называть статистическими весами различных чистых состояний $\psi^{(i)}$.

Если мы в рассмотренном выше примере положим $c_k = \sqrt{p_k} \exp(i\alpha_k)$, то увидим, что определенные таким образом величины $p_k = |c_k|^2$ являются ста-

статистическими весами смешанного состояния, которое в отношении измерения величины A эквивалентно чистому состоянию ψ . Но смешанное состояние, эквивалентное чистому состоянию ψ в отношении измерения величины B , не коммутирующей с A , будет характеризоваться статистическими весами, отличными от указанных выше, и именно поэтому чистое состояние невозможно представить в виде смешанного.

Как явствует из рассмотренного выше примера, среднее значение величины B в чистом состоянии $\psi = \sum_k c_k \varphi_k$ равно $\sum_{k,l} c_k^* c_l B_{kl}^0$, где $B_{kl}^0 = \int \varphi_k^* B \varphi_l d\tau$. Если же заменить это чистое состояние статистическим ансамблем, относящимся к измерению величины A , то для среднего значения величины B мы получим выражение $\sum_k |c_k|^2 B_{kk}^0$. Легко видеть, чем эти два средних значения отличаются друг от друга. Поскольку $c_k = |c_k| e^{i\alpha_k}$, где α_k — фаза величины c_k , первое выражение равно

$$\sum_{k,l} |c_k| |c_l| e^{i(\alpha_l - \alpha_k)} B_{kl}^0.$$

Если предположить, что фазы α_k неизвестны, то математическое ожидание этого выражения мы получим, усреднив его по фазам α_k , которые предполагаются равновероятными. Оно оказывается равным $\sum_k |c_k|^2 B_{kk}^0$, т. е. выражению для среднего значения во втором случае. Другими словами, мы переходим от первого случая (чистое состояние ψ) ко второму случаю (статистический ансамбль, соответствующий измерению A), полагая, что полностью потеряна информация о фазах α_k . Данное обстоятельство легко интерпретировать на основе общих представлений волновой механики. В самом деле, первый случай соответствует прямому измерению величины B в чистом состоянии ψ , а второй — измерению величины B , проводимому после измерения величины A , так что измерение A преобразует чистое состояние ψ в смешанное со статистическими весами $|c_k|^2$. Но мы видели, что измерение величины A полностью стирает информацию о разностях фаз между составляющими φ_k начальной функции ψ (т. е. о разностях фаз $\alpha_k - \alpha_l$). Это вполне согласуется с результатом, полученным выше.

Итак, мы получили четкое представление о различии между чистым состоянием, характеризуемым функцией ψ , и смешанным состоянием с волновыми функциями $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \dots$ и с соответствующими статистическими весами p_1, p_2, \dots . Мы видели также, что в общем случае измерение какой-либо величины для физической системы, находящейся в чистом состоянии, преобразует это чистое состояние в смешанное. В то время как понятие смешанного состояния, соответствующее понятию статистического ансамбля, есть классическое понятие теории вероятностей, чистое состояние как совершенно новый «сплав» бесконечного множества статистических ансамблей есть новое понятие, не известное в классической теории вероятностей.

Добавим еще одно замечание относительно термина «чистое состояние». Иногда говорят, что состояние, характеризуемое волновой функцией ψ , является чистым в отношении величины A , когда эта функция является собствен-

ной функцией оператора $A(\psi = d_i \varphi_i$, причем $|d_i| = 1$); в этом случае физическая величина A имеет совершенно определенное значение α_i . Но мы ранее назвали чистым состояние, в котором вероятности определяются одной функцией ψ , а не несколькими с разными статистическими весами. Эти два определения чистого состояния могут показаться неидентичными, но на самом деле одно из них можно свести к другому. Так, если волновая функция системы равна ψ , то всегда существует линейный эрмитов оператор $A^{(1)}$, для которого ψ — собственная функция; такому оператору соответствует некая физическая наблюдаемая, имеющая в рассматриваемом состоянии ψ совершенно определенное значение²⁾. Это станет ясно, если ψ рассматривать как вектор в гильбертовом пространстве и учесть, что этот вектор всегда можно выбрать в качестве одного из векторов некой системы (и даже бесконечного множества систем) ортонормированных базисных векторов. Стало быть, всякое состояние, характеризуемое какой-то функцией ψ , можно рассматривать как чистое для некоторой соответствующим образом выбранной величины A , и это позволяет согласовать два указанных значения термина «чистое состояние».

2. СТАТИСТИЧЕСКАЯ МАТРИЦА ФОН НЕЙМАНА ДЛЯ ЧИСТОГО СОСТОЯНИЯ

Рассмотрим сначала чистое состояние, характеризуемое заданной волновой функцией ψ . Эту функцию можно рассматривать как вектор в гильбертовом пространстве функций. Если функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$ образуют полную ортонормированную систему базисных функций (например, собственных функций линейного эрмитова оператора A), то можно считать, что φ_i образуют ортогональную систему единичных векторов в гильбертовом пространстве и выражение $\psi = \sum_k c_k \varphi_k$ будет аналогично разложению вектора по ортогональным направлениям, характеризуемым единичными векторами. Величины c_k будут составляющими вектора ψ в системе базисных векторов φ_k . Гильбертово пространство, которое мы рассматриваем, есть комплексное пространство, и составляющие c_k векторов, вообще говоря, будут комплексными.

Если взять два вектора в гильбертовом пространстве $\psi = \sum_k c_k \varphi_k$ и $\chi = \sum_k d_k \varphi_k$, то их скалярное произведение по определению равно

$$(\psi \cdot \chi) = \int_D \psi^* \chi \, d\tau = \sum_{k,l} c_k^* d_l \int_D \varphi_k^* \varphi_l \, d\tau = \sum_{k,l} c_k^* d_l \delta_{kl} = \sum_k c_k^* d_k \quad (1)$$

в силу ортонормированности функций φ_k . Здесь мы имеем дело с обобщением на комплексный случай классического выражения для скалярного произ-

¹⁾ И даже бесконечное множество таких операторов. — Л. Б.

²⁾ Сейчас автор, конечно, выразился бы осторожнее: всякой наблюдаемой, несомненно, соответствует некий эрмитов оператор, но трудно утверждать, как это делали все, обратное — что *всякому* произвольно выбранному оператору соответствует некая наблюдаемая. — Ж. Л.

ведения. Отметим, что $(\psi \cdot \chi) = (\chi \cdot \psi)^*$. Скалярное произведение вектора ψ на самого себя, аналогичное квадрату длины обычного вектора, называется нормой вектора ψ и обозначается через $N(\psi)$:

$$N(\psi) = (\psi \cdot \psi) = \int_D \psi^* \psi d\tau = \int_D |\psi|^2 d\tau = \sum_k |c_k|^2. \quad (2)$$

Если функция ψ нормирована, то $N(\psi) = 1$ и $\sum_k |c_k|^2 = 1$, что мы уже знаем.

В гильбертовом пространстве оператор переводит один вектор в другой. Равенство $\chi = A\psi$ означает, что оператор A переводит вектор ψ в вектор χ . Это равенство можно переписать в виде $\sum_l d_l \varphi_l = A \sum_k c_k \varphi_k$, откуда после умножения на φ_j^* и интегрирования по области D получаем

$$d_j = \sum_k c_k \int_D \varphi_j^* A \varphi_k d\tau = \sum_k a_{jk} c_k. \quad (3)$$

Матричные элементы, порождаемые оператором A в системе функций φ_k , представляют собой коэффициенты линейного преобразования, позволяющего переходить от составляющих вектора ψ к составляющим вектора χ .

Пусть снова ψ — волновая функция чистого состояния. Рассмотрим в гильбертовом пространстве операцию «проектирования на вектор ψ ». Пусть P_ψ — соответствующий оператор. Очевидно, что $P_\psi^2 = P_\psi$ и, кроме того, $P_\psi^* = P_\psi$. Такой оператор называется «идемпотентным», поскольку все его степени равны друг другу.

Пусть имеется полная система ортонормированных базисных функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$. Функцию ψ можно представить в виде разложения $\psi = \sum_k c_k \varphi_k$, где

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k^* \psi d\tau, \quad \sum_k |c_k|^2 = 1$$

(поскольку величина ψ нормирована). Мы уже отмечали, что можно найти бесконечное множество систем ортонормированных базисных векторов, одним из которых будет ψ . В одной из таких систем функцию φ_r можно представить в виде разложения

$$\varphi_k = d\psi + \dots, \quad \text{где } D = \int_D \psi^* \varphi_k d\tau = c_k^*.$$

Оператор P_ψ , являющийся «проектором» на ψ , определяется как оператор, удовлетворяющий условию

$$P_\psi \varphi_k = d\psi = c_k^* \psi \quad \text{для всех } \varphi_k.$$

Матрица, порождаемая оператором P_ψ в системе базисных функций φ_k ,

имеет элементы с индексами mn :

$$(P_{\psi})_{mn} = \int_D \psi_m^* P_{\psi}(\varphi_n) d\tau = c_n^* \int_D \varphi_m^* \psi d\tau = c_m c_n^*. \quad (4)$$

Таким образом, матрица P_{ψ} , соответствующая рассматриваемому чистому состоянию, выражается через коэффициенты разложения функции ψ по выбранным базисным функциям. В результате мы приходим к определению того, что фон Нейман назвал «статистической матрицей» для чистого состояния ψ . Такая матрица, как очевидно, эрмитова. Указанная статистическая матрица обладает двумя фундаментальными свойствами.

1. Ее след равен единице. В самом деле,

$$\text{Tr } P_{\psi} = \sum_n (P_{\psi})_{nn} = \sum_n c_n^* c_n = \sum_n |c_n|^2 = 1. \quad (5)$$

2. Она идемпотентна, т. е. $P_{\psi}^n = P_{\psi}$ (n — целое). В самом деле, например,

$$(P_{\psi}^2)_{mn} = \sum_p c_m c_p^* c_p c_n^* = c_m c_n^* = (P_{\psi})_{mn}, \quad (6)$$

откуда $P_{\psi}^2 = P_{\psi}$, и далее в силу рекуррентности $P_{\psi}^n = P_{\psi}$.

Пусть теперь величина A измеряется в данной системе базисных функций. Функции φ_k — произвольные ортонормированные базисные функции (которые здесь необязательно должны быть собственными функциями оператора A), так что, как мы видели, среднее значение величины A равно

$$\bar{A} = \sum_{k,l} c_k^* c_l A_{kl}^{\varphi},$$

где A_{kl}^{φ} — элементы матрицы, порождаемой оператором A в системе базисных функций φ_k , а c_k — составляющие вектора ψ в разложении по функциям φ_k . Таким образом, можно написать

$$\bar{A} = \sum_{k,l} (P_{\psi})_{lk} A_{kl}^{\varphi} = \text{Tr}(P_{\psi} A) = \text{Tr}(A P_{\psi}). \quad (7)$$

Следовательно, зная статистическую матрицу, мы можем очень просто вычислить \bar{A} .

Статистическая матрица для чистого состояния часто называется «элементарной» статистической матрицей (Einzelmatrix) в противоположность более общим статистическим матрицам, которые мы определим позднее для случая смешанных состояний.

Элементарную статистическую матрицу легко привести к диагональному виду. Для этого в качестве системы базисных векторов необходимо взять такую систему, одной из базисных функций которых будет ψ , например $\varphi_1 = \psi$.

Тогда элементарная матрица примет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Все ее диагональные элементы равны нулю, кроме одного, который равен единице, поскольку $(P_\psi)_{nm} = c_n c_m^*$, так что $(P_\psi)_{nm} = 0$ при $n \neq m$ и $(P_\psi)_{nn} = 0$ при $n \neq 1$;

$$(P_\psi)_{11} = c_1^* c_1 = 1, \text{ поскольку } \psi = c_1 \varphi_1, \text{ причем } |c_1| = 1.$$

Так как след есть инвариант по отношению к изменению системы базисных векторов, он всегда должен равняться единице; это не требует доказательства. Кроме того, $P^n = P$.

3. СТАТИСТИЧЕСКАЯ МАТРИЦА ДЛЯ СМЕШАННОГО СОСТОЯНИЯ

Теперь рассмотрим смешанное состояние. Ранее мы определили такое состояние, рассматривая \mathcal{N} систем, из которых $\mathcal{N}p_1$ находятся в состоянии $\psi^{(1)}$, $\mathcal{N}p_2$ — в состоянии $\psi^{(2)}$ и т. д., причем $\sum_k p_k = 1$. Но мы можем ввести также понятие смешанного состояния для одной-единственной системы. Мы можем даже не знать точного вида функции ψ для этой системы, а знать лишь, что с вероятностью p_1 она находится в состоянии $\psi^{(1)}$, с вероятностью p_2 — в состоянии $\psi^{(2)}$, . . . , наконец, с вероятностью p_n — в состоянии $\psi^{(n)}$, причем, разумеется, $\sum_{k=1}^n p_k = 1$. Состояние данной системы представляется в этом случае смесью чистых состояний $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \dots, \psi^{(n)}$, характеризуемых весами p_1, p_2, \dots, p_n .

Каждое из чистых состояний в смеси имеет свою статистическую матрицу $P_{\psi^{(k)}}$. Смешанному состоянию мы сопоставим эрмитову статистическую матрицу

$$P = \sum_{k=1}^n p_k P_{\psi^{(k)}}, \text{ откуда}$$

$$P_{lm} = \sum_{k=1}^n p_k c_l^{(k)} c_m^{(k)*}, \quad (8)$$

где статистические веса p_k — положительные числа, принимающие значения от 0 до 1 и удовлетворяющие условию $\sum_{k=1}^n p_k = 1$. Величины $c^{(k)}$ — это составляющие различных векторов $\psi^{(k)}$ в одной и той же системе базисных

функций $\varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots$. Здесь статистическая матрица представляется в виде суперпозиции элементарных статистических матриц¹⁾.

Среднее значение наблюдаемой A для нашей системы равно

$$\bar{A} = \sum_{k=1}^n p_k \overline{A_{\psi^{(k)}}}, \quad (9)$$

где $\overline{A_{\psi^{(k)}}}$ есть среднее значение, которое имела бы величина A , если бы система находилась в чистом состоянии $\psi^{(k)}$ ($\overline{A_{\psi^{(k)}}} = \int_D \psi^{(k)*} A \psi^{(k)} d\tau$). Поскольку

$$\overline{A_{\psi^{(k)}}} = \text{Tr}(P_{\psi^{(k)}} A), \quad (10)$$

мы находим

$$\bar{A} = \sum_{k=1}^n p_k \sum_i (P_{\psi^{(k)}} A)_{ij} = \sum_j \left(\sum_{k=1}^n p_k P_{\psi^{(k)}} \right)_{ij} = \text{Tr}(P \cdot A) = \text{Tr}(A \cdot P). \quad (11)$$

Получается такая же формула, как и для чистого состояния.

Статистическая матрица для смешанного, как и для чистого, состояния всегда имеет след, равный единице, поскольку

$$\text{Tr} P = \sum_m P_{mm} = \sum_m \sum_{k=1}^n p_k c_m^{(k)} c_m^{(k)*} = \sum_{k=1}^n p_k \sum_m |c_m^{(k)}|^2 = 1, \quad (12)$$

так как функции $\psi^{(k)} = \sum_m c_m^{(k)} \varphi_m$ нормированы.

В противоположность этому, хотя элементарная статистическая матрица идемпотентна, этим свойством не обладает статистическая матрица смешанного состояния. В самом деле, мы можем показать, что всякая идемпотентная статистическая матрица является элементарной. Для этого предположим, что $P^2 = P$, и приведем матрицу P к диагональному виду, что всегда возможно, так как, поскольку p_i есть i -й диагональный элемент матрицы P , соотношение $P^2 = P$ приводит к равенству $p_i = p_i^2$. В таком случае элементы p_i равны либо

¹⁾ Если в качестве базисных функций φ_i выбрать систему собственных функций, характеризующих положение, т. е. функций $\delta(q - q')$, то $c_i^{(k)}$ будут иметь значения $\psi^{(k)}(q', t)$, как можно видеть из формулы

$$\psi^{(k)}(q, t) = \int \psi^{(k)}(q', t) \delta(q - q') dq',$$

и тогда

$$P(q', q'') = \sum_{k=1}^n \psi^{(k)}(q') \psi^{(k)*}(q'').$$

Это — «статистическая матрица Дирака» — Л. Б.

0, либо 1. Соотношение $\text{Tr } P = 1$, выполняющееся для всякой статистической матрицы, показывает, что лишь одно из значений p_i будет отлично от 0 и равно 1. Поэтому для системы имеется единственная функция ψ , совпадающая с одной из базисных функций в представлении, в котором матрица P диагоналізується. Таким образом, для того, чтобы статистическая матрица была идемпотентна, необходимо и достаточно, чтобы она была элементарной.

Рассмотрим элементарную статистическую матрицу для смешанного состояния. Если бы функции $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \dots, \psi^{(n)}$, которыми характеризуются чистые состояния, входящие в смесь, были взаимно ортогональны (что возможно в отдельных случаях), то их можно было бы взять в качестве n первых базисных функций ортонормированной системы. Тогда $c_m^{(k)} = \delta_{km}$, поскольку $\psi^{(k)} = \sum_m c_m^{(k)} \varphi_m$ сводится к φ_k , и P_{mn} будет равно нулю при $m \neq n$ и $P_{kk} = p_k$ при $k \leq n$. В связи с этим статистическая матрица принимает диагональный вид

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & p_2 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & p_3 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & p_n & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где n первых диагональных элементов равны p_1, \dots, p_n , а все остальные равны нулю.

Но это — исключительный случай. Вообще же говоря, $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \dots, \psi^{(n)}$ не являются взаимно ортогональными. Тем не менее эрмитову матрицу можно привести к диагональному виду, но диагональные элементы p_1, p_2, \dots не обязательно будут равны p_1, p_2, \dots :

$$P = \begin{pmatrix} p'_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p'_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Поскольку матрица P эрмитова, ее элементы p'_k — действительные числа. Кроме того, $\sum_k p'_k = 1$, поскольку след матрицы равен единице. Покажем, что элементы p'_k не могут быть отрицательными. Для этого положим, что ξ_k — координаты вектора Ξ в гильбертовом пространстве, и рассмотрим скалярное произведение вектора Ξ на $P\Xi$. Оно будет равно

$$\sum_{m,n} \xi_m^* \sum_{k=1}^n p_k c_m^{(k)} c_n^{(k)*} \xi_n = \sum_{k=1}^n p_k |\Xi \cdot \psi^{(k)}|^2.$$

Поскольку квадрат модуля скалярного произведения Ξ на $\psi^{(k)}$ должен быть положительным или равным нулю и все p_k тоже неотрицательны, произведение $(\Xi \cdot P\Xi)$ должно быть либо положительным, либо равным нулю. Но если

мы приведем матрицу P к диагональному виду, то скалярное произведение $(\Xi \cdot P\Xi) \geq 0$ примет вид $\sum_m p'_m |\xi_m|^2$, так что

$$(\Xi \cdot P\Xi) = \sum_m p'_m |\xi_m|^2 \geq 0, \quad (15)$$

и это должно выполняться для любого вектора Ξ . Поэтому все элементы p'_m либо положительны, либо равны нулю. Поскольку их сумма равна единице, мы имеем

$$0 \leq p'_m \leq 1.$$

Отсюда следует, что $p'_m - p_m'^2 \geq 0$, и, стало быть, для любого вектора Ξ в гильбертовом пространстве выполняется условие

$$(\Xi \cdot (P - P^2)\Xi) = \sum_m |\xi_m|^2 (p'_m - p_m'^2) \geq 0. \quad (16)$$

4. НЕПРИВОДИМОСТЬ ЧИСТЫХ СОСТОЯНИЙ

Теперь мы приходим к очень важной теореме, на основе которой фон Нейман доказал¹⁾ невозможность сведения вероятностного характера волновой механики к скрытой детерминированности; его доказательство мы приведем ниже.

Рассматриваемая важная теорема устанавливает действительную специфичность чистых состояний. Она формулируется следующим образом:

Теорема. Чистое состояние невозможно представить в виде смешанного, или, другими словами, чистое состояние нельзя представить в виде суммы чистых состояний.

Если бы это было неверно, то по меньшей мере в некоторых случаях можно было бы иметь соотношение

$$P = \sum_i \alpha_i Q_i,$$

где P и Q_i — элементарные статистические матрицы, т. е. идемпотентные эрмитовы матрицы со следом, равным единице, а α_i — положительные числа, для которых $\sum_i \alpha_i = 1$. Но тогда мы имели бы

$$P^2 = \sum_i \alpha_i^2 Q_i^2 + \sum_{i \neq j} \frac{1}{2} \alpha_i \alpha_j (Q_i Q_j + Q_j Q_i) =$$

¹⁾ Позже автор другими чернилами зачеркнул слово «доказал» и написал «пытался доказать». — Ж. Л.

$$\begin{aligned}
&= \sum_i \alpha_i^2 Q_i^2 + \sum_{i>j} \alpha_i \alpha_j [Q_i^2 + Q_j^2 - (Q_i - Q_j)^2] = \\
&= \sum_i \left[\alpha_i^2 + \alpha_i \sum_{j \neq i} \alpha_j \right] Q_i^2 - \sum_{i>j} \alpha_i \alpha_j (Q_i - Q_j)^2 = \\
&= \sum_i \alpha_i Q_i^2 - \sum_{i>j} \alpha_i \alpha_j (Q_i - Q_j)^2, \tag{17}
\end{aligned}$$

поскольку $\sum_{j \neq i} \alpha_j = 1 - \alpha_i$. Таким образом,

$$P^2 - P = \sum_i \alpha_i (Q_i^2 - Q_i) - \sum_{i>j} \alpha_i \alpha_j (Q_i - Q_j)^2. \tag{18}$$

Но $P^2 = P$ и $Q_i^2 = Q_i$, т. е.

$$\sum_{i>j} \alpha_i \alpha_j (Q_i - Q_j)^2 = 0, \tag{19}$$

и, поскольку α_i положительны,

$$(Q_i - Q_j)^2 = 0. \tag{20}$$

Но квадрат эрмитовой матрицы может равняться нулю только в том случае, если сама эта матрица равна нулю, так как если A — эрмитова матрица, то элементы матрицы A^2 равны

$$(a^2)_{ik} = \sum_l a_{il} a_{lk} = \sum_l a_{il} a^*_{kl}$$

и, если элементы $(a^2)_{ii}$ равны нулю, то должно выполняться равенство $\sum_l |a_{il}|^2 = 0$, откуда следует, что $a_{il} = 0$, т. е. $A = 0$.

Для эрмитовой матрицы $Q_i - Q_j$ из условия $(Q_i - Q_j)^2 = 0$ следует равенство $Q_i = Q_j$, и все Q_i будут совпадать между собой, т. е. $P = Q_i \sum_i \alpha_i = Q_i$, поскольку $\sum_i \alpha_i = 1$. Отсюда вытекает, что матрица P вопреки нашему предположению не является суммой элементарных статистических матриц.

Итак, мы доказали, что чистые состояния неприводимы и что их нельзя представить в виде смеси чистых состояний. Таким образом, чистое состояние в волновой механике обладает двумя следующими свойствами: 1) оно характеризуется элементарной статистической матрицей, тогда как всякое смешан-

ное состояние описывается статистической матрицей, которая не является элементарной; 2) никаким способом его нельзя представить в виде смеси чистых состояний.

5. НЕВОЗМОЖНОСТЬ ОБЪЯСНЕНИЯ ЗАКОНОВ ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКИ СКРЫТОЙ ДЕТЕРМИНИРОВАННОСТЬЮ (ФОН НЕЙМАН)

Теперь мы подходим к знаменитым рассуждениям, путем которых фон Нейман доказал¹⁾ невозможность интерпретации вероятностных законов волновой механики на основе предположения о существовании скрытой от нас детерминированности. В классической физике, когда вместо точных законов вводили вероятности, всегда предполагали, что детерминированность явлений сохраняется, но что эта детерминированность слишком сложна или слишком тонка, чтобы мы могли ее полностью проследить, и нашим наблюдениям доступны лишь внешние эффекты, кажущиеся статистическими, а потому и являются вероятности. Таким образом, отрицалось существование случайности в философском смысле как какого-либо отсутствия детерминированности. Считалось, что детерминированность всегда лежит в основании, в глубине реальности. Лишь явления крупного масштаба, непосредственно воспринимаемые нашими органами чувств, могут казаться подчиняющимися вероятностным законам, но случайность появляется лишь постольку, поскольку мы не в состоянии проследить за очень тонкой и очень сложной детерминированностью. Именно такое определение случайности можно найти в трудах всех ученых-философов, которые занимались этими вопросами до создания квантовых теорий, в частности у Анри Пуанкаре.

Простейшим примером псевдостатистической теории классической физики может служить кинетическая теория газов. В ней допускается, что молекулы газа движутся по законам классической механики и их взаимные столкновения определяются строгими законами механики, так что в основе все детерминированно. Но молекул настолько много и их движения настолько сложны, что мы не можем детально следить за этой элементарной детерминированностью; таким образом, молекулярное движение полностью скрыто для наших органов чувств, и мы можем воспринимать лишь макроскопические эффекты, вызванные этим движением, такие, как давление и температура газа, некоторые локальные флуктуации плотности, броуновское движение видимых частичек и т. д. Поскольку эти макроскопические явления оказываются следствием громадного числа очень сложных элементарных процессов, они кажутся нам явлениями статистического характера, для описания которых необходимы вероятности, хотя такое появление случайности в теории есть лишь видимость.

¹⁾ Позже де Бройль несколько ослабил свое утверждение, так же как и выше, заменил слово «доказал» словами «пытался доказать». — Ж. Л.

Так, например, беспорядочное движение броуновской частицы представилось бы нам строго детерминированным, если бы мы могли рассчитать движение молекул и их соударения с этой частицей.

Поскольку в классической физике удалось таким образом исключить истинную случайность, заманчиво было бы попытаться исключить ее и в квантовой физике. В волновой механике мы имеем дело с распределением вероятностей, но нельзя ли предположить, что это обусловлено нашим незнанием некоей скрытой детерминированности? Если бы это оказалось возможным, то мы снова могли бы исключить недетерминированность и истинную случайность и сохранить классическое понятие случайности. Если бы, напротив, это не удалось, то нам пришлось бы принять недетерминированность и случайность. В первом случае волновая механика была бы псевдостатистической теорией классического типа, а во втором случае она была бы, по выражению фон Неймана, «истинно статистической» теорией. Фон Нейман провел рассуждения [путем которых, по-видимому, доказывається] невозможность сведения вероятностных законов волновой механики к скрытой детерминированности: *[таким образом, вопрос, по-видимому, решен во втором смысле и волновая механика представляется нам истинно статистической теорией, несовместимой с классической детерминированностью¹⁾].*

В своем доказательстве фон Нейман рассуждал следующим образом. Допустить некую скрытую детерминированность — значит допустить существование переменных, точные значения которых нам неизвестны (скрытых параметров), например положения и скорости молекул газа, так что вероятности вводятся вследствие того, что мы не знаем точных значений этих скрытых параметров. В детерминированной теории со скрытыми параметрами истинное состояние, например, газа в каждый момент полностью детерминировано: все молекулы газа имеют вполне определенные положения и скорости, и если бы мы знали все эти параметры, то могли бы характеризовать состояние газа некой точкой в фазовом пространстве. Но мы не знаем точные значения скрытых параметров и, чтобы характеризовать глобальные внешние эффекты, единственно воспринимаемые нашими органами чувств и нашими приборами, говорим о «смеси» элементарных состояний с соответствующими статистическими весами. Таким образом, в детерминистской теории со скрытыми параметрами, как и в кинетической теории газа, рассматриваются статистические

¹⁾ Позже Луи де Бройль ослабил данное высказывание двумя поправками: он заменил (карандашом) слова «путем которых, по-видимому, доказывається» словами «путем которых, как ему казалось, доказывається» и, кроме того, дважды зачеркнул вывод, который мы поместили в квадратные скобки: чернилами и карандашом. Если судить по всей рукописи, то представляется весьма вероятным, что карандашные поправки были сделаны *после* чернильных и что рукопись перечитывалась по меньшей мере *дважды*: все поправки в рукописи, имеющие отношение к двойному решению, были сделаны карандашом. Таким образом, несомненно, что на протяжении многих лет Луи де Бройль, не намереваясь публиковать данную рукопись, тем не менее обращался к ней в ходе своих размышлений. Некоторые места из рукописи, несомненно, использованы в других его работах. — Ж. Л.

смеси элементарных состояний, в которых все величины имеют вполне определенные значения, причем эти смешанные состояния вводятся из-за того, что мы не можем наблюдать элементарные состояния, характеризующиеся совершенно определенными значениями, и не можем следить за их изменением во времени. Элементарные состояния, составляющие смешанное состояние, в действительности неразложимы, и для них «нет дисперсий», ибо, поскольку любая величина A имеет вполне определенное значение, она равна своему среднему значению \bar{A} и $\sigma^2 = (A - \bar{A})^2 = \bar{A}^2 - (\bar{A})^2 = 0$, так же как равны нулю и все разности $A^n - (\bar{A})^n$.

Короче говоря, для того чтобы статистическую теорию можно было свести к детерминистской схеме со скрытыми параметрами, все статистические распределения, фигурирующие в этой теории, должны сводиться к смесям элементарных неразложимых состояний, не имеющих дисперсии. Фон Нейман показал, что в волновой механике это не имеет места¹⁾. При этом он опирался на следующую важную теорему.

Теорема. Состояния, которые встречаются в волновой механике, никогда не являются состояниями без дисперсии.

Другими словами, ни в одном состоянии, возможном в волновой механике, для всех наблюдаемых не может выполняться соотношение $\bar{A}^2 = (\bar{A})^2$.

Чтобы убедиться в этом, мы будем исходить из того, что, как было установлено выше, в волновой механике любое состояние (независимо от того, является ли оно смешанным или чистым состоянием) характеризуется эрмитовой статистической матрицей P , след которой равен единице, так что среднее значение любой величины в рассматриваемом состоянии равно

$$\bar{A} = \text{Tr}(P \cdot A) = \text{Tr}(A \cdot P). \quad (21)$$

Но для того чтобы в волновой механике состояние было без дисперсий, для всякой величины A должно выполняться равенство $\bar{A}^2 = (\bar{A})^2$, т. е.

$$\text{Tr}(PA^2) = [\text{Tr}(P \cdot A)]^2. \quad (22)$$

Пусть теперь $\varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots$ — система ортонормированных базисных функций. Рассмотрим в гильбертовом пространстве оператор, проецирующий любой вектор из этого пространства на вектор φ_i . Подобного рода проектор P_{φ_i} является линейным эрмитовым оператором, и мы можем принять $A = P_{\varphi_i}$. Если состояние является состоянием без дисперсий, то, в частности, должно выполняться равенство

$$\text{Tr}(PP_{\varphi_i}^2) = [\text{Tr} P \cdot P_{\varphi_i}]^2. \quad (23)$$

Но из того, что P_{φ_i} является оператором проектирования, следует равенство

¹⁾ Здесь автор тоже позднее написал «попытался показать» вместо «показал». — Ж. Л.

$$P_{\varphi_i}^2 = P_{\varphi_i}. \text{ Таким образом,} \\ \text{Tr } PP_{\varphi_i} = (\text{Tr } P \cdot P_{\varphi_i})^2, \quad (24)$$

или

$$\text{Tr } PP_{\varphi_i} = \sum_k \int_D \varphi_k^* PP_{\varphi_i} \varphi_k d\tau = \sum_k \int_D \varphi_k^* P \varphi_i d\tau \delta_{ik}, \quad (25)$$

т. е.

$$\text{Tr } PP_{\varphi_i} = \int_D \varphi_i^* P \varphi_i d\tau = P_{ii}. \quad (26)$$

Данный след должен равняться своему собственному квадрату, а потому $P_{ii} = 1$ или $P_{ii} = 0$. И это должно выполняться при всех индексах i , поскольку мы можем рассуждать аналогичным образом при любых P_{φ_i} . Но можно предположить, что некоторые из элементов P_{ii} равны нулю, а другие — единице. Тогда соотношение $\sum P_{ii} = 1$ может выполняться, если все элементы P_{ii} равны нулю, кроме одного.

Но последний вариант должен быть отброшен, поскольку в гильбертовом пространстве можно непрерывным образом менять систему ортонормированных базисных функций путем операции, соответствующей вращению осей в этом функциональном пространстве. Таким образом, мы можем последовательно переходить с помощью непрерывной операции от каждой из первоначальных базисных функций к другим базисным функциям. В процессе такой непрерывной операции все элементы P_{ii} должны непрерывно изменяться, а поскольку для них возможны лишь значения 0 или 1, они должны сохранять свои первоначальные значения. Следовательно, либо все элементы P_{ii} равны единице, либо все они равны нулю. Но ни то, ни другое неприемлемо, поскольку след матрицы P , равный $\sum_i P_{ii}$, должен равняться 1, тогда как он будет равен нулю в одном случае и бесконечности — в другом.

Таким образом, не может существовать какая-либо приемлемая статистическая матрица P , соответствующая отсутствию дисперсии для всех наблюдаемых. Впрочем, этот результат можно было предвидеть, поскольку мы знаем, что даже для чистого состояния (когда система имеет определенную волновую функцию) дисперсии σ_x и σ_{p_x} двух канонически сопряженных величин не могут одновременно равняться нулю (так как по теореме о дисперсиях $\sigma_x \cdot \sigma_{p_x} \geq h/4\pi$).

Итак, мы не можем свести распределения вероятностей в волновой механике к смесям неразложимых состояний, не имеющих дисперсий. В волновой механике существуют неразложимые состояния (такowymi являются чистые состояния), но эти состояния не являются состояниями без дисперсий. Отсюда вместе с фон Нейманом можно сделать вывод, что распределения вероятностей в волновой механике нельзя интерпретировать на основе гипотезы о скрытой детерминированности и о скрытых параметрах. Этот вывод может быть получен в результате изучения лишь чистых состояний, но общий анализ, выполненный фон Нейманом, позволяет провести более точное сравнение с вероятностными теориями в классической физике.

[В заключение своих размышлений об основаниях новой механики фон Нейман в очень категорической форме высказался о невозможности возвращения к классическим детерминистским понятиям. Чтобы не быть голословным, я процитирую следующие фразы из его книги «Математический формализм квантовой механики»:

«Можно следующим образом резюмировать состояние проблемы детерминированности (фон Нейман говорит «причинности») в современной физике. В макроскопической физике никакой опыт не может доказать детерминированности, поскольку причинный порядок, который представляется существующим в макроскопическом мире, не имеет другого основания, кроме закона больших чисел, и это совершенно не зависит от того, следуют или нет причинным законам элементарные процессы, являющиеся истинными физическими процессами. То, что сходные макроскопические объекты ведут себя одинаково, не имеет отношения к детерминированности: такие объекты нельзя считать действительно тождественными, поскольку координаты, фиксирующие состояния их атомов, никогда не совпадают и наблюдаемые макроскопические явления есть результат усреднения по этим координатам.

Критерием детерминированности могут быть по-настоящему лишь сами элементарные процессы на атомном уровне; но на таком уровне при нынешнем состоянии наших знаний все говорит против детерминированности, поскольку единственная формальная теория, соответствующая опыту, — квантовая механика — находится в логическом противоречии с детерминизмом . . . Поэтому сегодня нет никаких оснований для того, чтобы утверждать о наличии детерминированности в природе: никакой опыт не может дать доказательства его существования, поскольку макроскопические явления не могут доказать этого по самому своему характеру, а единственная теория, согласующаяся с тем, что нам известно об элементарных процессах, приводит к отказу от детерминизма».

Трудно утверждать, что такой приговор должен быть безоговорочно принят, но нельзя не признать, что возвращение к детерминистским представлениям классической физики становится крайне маловероятным.

По-видимому, против выводов фон Неймана можно возражать, лишь показывая, что распределения вероятностей, предсказываемые принципами волновой механики, не соответствуют опытным данным. Но в настоящее время точность этих вероятностных распределений доказана путем изучения громадного числа процессов на атомном уровне, так что оказывается очень трудным поставить ее под сомнение¹⁾.]

¹⁾ Вероятно, еще когда Луи де Бройль в первый раз перечитывал рукопись, он зачеркнул (чернилами) свое собственное заключение, в котором принимал, хотя и в смягченных выражениях, категорические утверждения фон Неймана. Но (позднее?) он зачеркнул карандашом весь большой отрывок, в котором цитируется заключение фон Неймана. Напротив зачеркнутого текста он приклеил довольно большой лист бумаги с нижеследующим важнейшим примечанием, в котором дается первое опровержение теоремы фон Неймана, позднее развитое в работах [II, 27, 29]. Добавим, что длинная цитата

из фон Неймана не соответствует французскому переводу Прока (с. 223 упоминаемого выше издания); это собственный перевод Луи де Бройля. — Ж. Л.

(Примечание, сделанное чернилами на листе, добавленном позднее к тексту.) Однако существование теории волны-пилота, по-видимому, показывает, что в рассуждениях фон Неймана имеется слабое место. В самом деле, теория волны-пилота дает причинную интерпретацию вероятностных законов волновой механики на основе скрытых переменных, так что, несмотря на возникающие трудности, такая теория может существовать в противоположность утверждениям фон Неймана о невозможности такой теории. Таким образом, в его рассуждениях имеется слабое место. Я думаю, что оно состоит в следующем: фон Нейман допускает, что все распределения вероятностей существуют на равных правах в каждый момент времени. В теории же волны-пилота положение другое: в каждый момент времени частица имеет вполне определенное положение и импульс, которые для нас являются «скрытыми переменными», недоступными нашим измерениям. Таким образом, отсутствие у нас информации о положении частицы влечет за собой введение классическим путем вероятностей найти частицу в том или ином положении, которые соответствуют вероятностям $|\psi|^2$ волновой механики. В противоположность этому составляющие импульса будут иметь возможные значения, которые, вообще говоря, изменяются очень сложным образом и распределения вероятностей которых не представляют практической ценности, поскольку эти значения неизмеряемы. Что же касается распределения вероятностей, даваемого для составляющих импульса волновой механикой (принцип спектрального разложения), то оно относится лишь к ситуации, возникающей после измерения импульса, когда не известен результат измерения. Стало быть, два распределения вероятностей, для координаты и для импульса, не существуют одновременно, в чем и состоит ошибочность рассуждений фон Неймана.

Уточним сказанное. Путь для начального состояния

$$\psi(x) = \sum_{p_x} c(p_x) \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} p_x x\right) = a \exp(i\varphi).$$

В теории волны-пилота частица имеет реальную координату x' с вероятностью $|\psi(x')|^2$ и составляющую импульса

$$p_x = -\frac{h}{2\pi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{x=x'}.$$

Мы имеем классический ансамбль (смешанное состояние), характеризуемый весами $|\psi(x')|^2$, и для всякой физической величины A справедливо соотношение $\overline{A^2} = (\overline{A})^2$ в состоянии, определяемом координатой $x = x'$. Если же измерить величину p_x , что эквивалентно выделению тех или иных составляющих в разложении Фурье, то мы получим другой ансамбль — из волновых пакетов, соответствующих различным значениям величины p_x , с весами $|c(p_x)|^2$. Таким образом, ошибка в рассуждениях фон Неймана состоит в желании рассматривать в одно и то же время два ансамбля, один из которых относится к начальному состоянию, а другой — к состоянию после измерения величины p_x . Именно это и мешает прийти снова к схеме классической статистики, когда для всех величин принимаются распределения вероятностей волновой механики.

Согласно теории волны-пилота, координатное представление имеет более важное значение, нежели импульсное представление, что приводит к интересным соображениям, относящимся к старой проблеме существования различных цветов в сложной волне. — Л. Б.

Глава XV

Теория измерений в волновой механике

1. ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ

Как мы уже видели, измерение играет принципиально важную роль в квантовой недетерминированности. По современным представлениям эта его роль в микрофизике совершенно иная, нежели было в макроскопической физике, рассматриваемой на базе классических представлений. В классической физике измерение, по крайней мере если оно выполняется достаточно аккуратно, есть простая констатация, которая уточняет наши знания о действительном объекте, не возмущая его. Реальные элементарные состояния предполагаются совершенно определенными, а поэтому всякая неполнота информации о них выражается во введении вероятностей, характеризующих некое смешанное состояние, в которое различные элементарные состояния входят с соответствующими статистическими весами, так что измерения дают возможность уменьшить степень нашего незнания и даже вообще ликвидировать его, концентрируя состояния в смеси и даже сводя ее к одному совершенно определенному элементарному состоянию. Например, в классической кинетической теории газов элементарное состояние характеризуется определенными значениями всех координат и скоростей молекул, но, поскольку мы не имеем возможности наблюдать эти величины, мы не знаем их точных значений и вынуждены говорить о статистических ансамблях, которые соответствуют смесям элементарных состояний, взятых с определенными статистическими весами. Но если бы мы могли в данный момент времени измерить положение и скорость всех молекул газа (измерение, которое в классической физике считается в принципе возможным, хотя практически неосуществимым), то такое измерение уточнило бы наши знания и свело бы смешанное состояние к одному неразложимому элементарному состоянию.

Таким образом, распределения вероятностей, встречающиеся в классической физике, — это всегда характеристики смешанного состояния, и измерение (испытание, как говорится в статистике) увеличивает наши знания, указывая нам истинное точное значение величины, которое объективно существует в момент измерения, и не изменяя его заметно (если измерение проводится правильно).

Совсем иначе обстоит дело в квантовой теории. Здесь максимум наших знаний о системе достигается в том случае, когда мы можем рассматривать

ее как находящуюся в чистом состоянии, т.е. когда мы можем приписать этому состоянию определенную волновую функцию ψ . В таком состоянии, отвечающем максимуму наших знаний о системе, невозможно точно знать все величины, характеризующие систему; можно говорить только об их возможных значениях, т.е. о значениях, которые могут быть получены при измерении, и если некоторые из величин могут иметь только одно возможное (следовательно, точно известное) значение, то для всех сразу величин это невозможно, поскольку в чистом состоянии все величины не могут иметь нулевую дисперсию. Таким образом, здесь измерение никогда не может дать нам в качестве характеристики состояния системы ничего более точного, нежели новое чистое состояние, в котором некоторые величины тоже имеют отличную от нуля дисперсию. Измерение увеличивает информацию о некоторых величинах, но соответственно уменьшает информацию о других величинах, так что максимум наших знаний о системе всегда соответствует некоему чистому состоянию с отличной от нуля дисперсией. К тому же измерение никоим образом не увеличивает нашего знания о состоянии системы, имевшем место до измерения, но *переводит* систему в новое состояние.

Чтобы правильно понять, какова роль измерения, нужно разобраться в том, как оно осуществляется. Для измерения необходимо взаимодействие между системой, над которой проводится измерение, и измерительным прибором. При этом показания измерительного прибора должны выражаться в *макроскопическом эффекте, непосредственно воспринимаемом нашими органами чувств*, таком, как перемещение стрелки по шкале. Рассмотрим более детально вопрос о том, что происходит при взаимодействии системы с измерительным прибором¹⁾.

¹⁾Было бы сознательным искажением мысли де Бройля не привести здесь соответствующую цитату из его книги «Критический анализ» [11, 29, с.5]:

«Наконец, я хотел бы еще подчеркнуть ту несомненно слишком преувеличенную роль, которую часто приписывают измерительному прибору при анализе наблюдений микрофизических величин. Ведь очень часто в таком наблюдении вообще не фигурирует измерительный прибор в собственном смысле этого слова. Когда фотон или электрон падает на фотопластинку и вызывает локальное потемнение и это потемнение рассматривается простым глазом, где в этом случае измерительный прибор? [...] И все же в некоторых случаях можно вводить измерительный прибор: например, можно измерять степень локального потемнения фотопластинки при помощи микроденситометра [...]. Но во всех таких случаях измерительный прибор вводится лишь в конце процесса доступной наблюдению локализации, когда цепная реакция уже в достаточной степени усилит явление, так что его становится возможным обнаружить при помощи прибора в обычном смысле этого слова». Слова «цепная реакция» переключаются с анализом процесса локализации, проведенным в самом начале цитируемой книги, где говорится:

«Микроскопический мир, т.е. физическая реальность на атомно-молекулярном уровне, недоступен непосредственно нашим восприятиям. Как же мы познаем его? Повидимому, на этот вопрос следует ответить так: мы знаем микромир *единственно* по «доступным наблюдению корпускулярным локализациям», т.е. по явлениям, в которых частица, действуя на микроскопическом уровне, путем некой цепной реакции вызывает доступный наблюдению эффект». — Ж.Л.

2. СТАТИСТИКА ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ СИСТЕМ

Пусть имеются две системы: одна — изучаемая система, а другая — измерительный прибор. Обозначим через x совокупность переменных первой системы, а через y — совокупность переменных второй системы. Пусть теперь $u_k(x)$ — полный набор собственных ортонормированных функций для первой системы, а $v_\rho(y)$ — аналогичная совокупность собственных функций для второй системы.

Когда системы изолированы друг от друга (начальное состояние), их волновые функции ψ_I и ψ_{II} изменяются во времени независимо соответственно своим волновым уравнениям и можно положить

$$\psi_I = \sum_k c_k(t) u_k(x), \quad \psi_{II} = \sum_\rho d_\rho(t) v_\rho(y). \quad (1)$$

В частности, поскольку предполагается, что изучаемая система I вначале находится в чистом состоянии, она и далее остается в чистом состоянии. Гамильтониан для полной системы, состоящей из двух рассматриваемых систем, равен сумме $H_I + H_{II}$ соответствующих гамильтонианов, а ее волновая функция имеет вид

$$\Psi(x, y, t) = \psi_I(x, t) \psi_{II}(y, t) = \sum_{k, \rho} c_k(t) d_\rho(t) u_k(x) v_\rho(y).$$

Эта функция характеризует чистое состояние полной системы, которое было до взаимодействия.

Измерение начинается в тот момент, когда включается взаимодействие между системами. В этот момент к полному гамильтониану $H_I + H_{II}$ системы добавится взаимодействие H_i , зависящее от координат x и y двух систем, причем оно будет содержать и перекрестные члены.

Функция ψ полной системы уже не будет суммой произведений $c_k u_k(x)$ на $d_\rho v_\rho(y)$, но, поскольку произведения $u_k(x) v_\rho(y)$ образуют полную ортонормированную базисную систему функций для совокупности переменных x и y , можно написать

$$\Psi(x, y, t) = \sum_{k, \rho} C_{k\rho}(t) u_k(x) v_\rho(y), \quad (2)$$

где, однако, коэффициенты $C_{k\rho}$ уже не будут иметь вида $c_k d_\rho$. Мы по-прежнему имеем для полной системы волновую функцию Ψ , изменяющуюся в соответствии с волновым уравнением, поэтому состояние системы все время остается чистым. Соответствующая элементарная статистическая матрица имеет вид

$$P_{k\rho, j\sigma} = C_{k\rho} C_{j\sigma}^*. \quad (3)$$

Отметим, что нам требуются два индекса для характеристики состояния полной системы.

Обратим теперь внимание на состояние системы I и рассмотрим некото-

рую величину A , такую, что

$$A_{kl} = \int_{D_1} u_k(x) A v_l^*(x) dx.$$

Среднее значение величины A во время взаимодействия будет равно

$$\bar{A} = \int \Psi^* A \Psi dx dy = \sum_{k\rho, l\sigma} C_{k\rho}^* C_{l\sigma} \int u_k^* A u_l dx \int v_\rho^* v_\sigma dy, \quad (4)$$

$$\bar{A} = \sum_{k\rho, l\sigma} C_{k\rho}^* C_{l\sigma} A_{kl} \delta_{\rho\sigma} = \sum_{kl\rho} C_{k\rho}^* C_{l\rho} A_{kl}.$$

Но для статистической матрицы P_I системы I во время взаимодействия должно выполняться соотношение

$$\bar{A} = \text{Tr}(P_I A), \quad (5)$$

откуда следует, что

$$(P_I)_{lk} = \sum_{\rho} C_{l\rho} C_{k\rho}^*. \quad (6)$$

Аналогично статистическая матрица системы II имеет вид

$$(P_{II})_{\sigma\rho} = \sum_k C_{k\sigma} C_{k\rho}^*. \quad (7)$$

Статистическая матрица P полной системы является идемпотентной и эрмитовой и имеет след, равный 1, в чем легко убедиться, учитывая ортонормированный характер произведения $u_k(x)v_\rho(y)$: оно представляет собой элементарную матрицу. Но о матрицах P_I и P_{II} этого нельзя сказать. Они эрмитовы со следом 1, но они уже не идемпотентны. Таким образом, в статистическом отношении состояния систем I и II, рассматриваемых отдельно, будут уже не чистыми, а смешанными. (Существенно, что эти смешанные состояния определяются средними значениями.)

Чтобы выяснить состав этих смешанных состояний, воспользуемся формулой

$$\Psi(x, y, t) = \sum_{k\rho} C_{k\rho} u_k(x) v_\rho(y). \quad (8)$$

При заданном значении ρ в этом разложении мы имеем члены $\sum_k C_{k\rho} u_k(x)$, где $\sum_{k,\rho} |C_{k\rho}|^2 = 1$. Таким образом, можно сказать, что при заданном значении ρ (т.е. при некотором заданном состоянии системы II) система I с вероятностью, пропорциональной $|C_{k\rho}|^2$, может оказаться в состоянии k . Абсолютное значение этой вероятности будет пропорционально величине $|C_k^{(\rho)}|^2$, если положить

$$C_k^{(\rho)} = \frac{C_{k\rho}}{\sqrt{\sum_l |C_{l\rho}|^2}}, \quad (9)$$

так что $\sum_k |C_k^{(\rho)}|^2 = 1$.

Таким образом, можно написать

$$(P_I)_{kl} = \sum_{\rho} p_{\rho} C_k^{(\rho)} C_l^{(\rho)*}, \quad (10)$$

$$\text{где } p_{\rho} = \sum_l |C_{l\rho}|^2,$$

и точно так же найдем

$$(P_{II})_{\rho\sigma} = \sum_k p_k C_{\rho}^{(k)} C_{\sigma}^{(k)*}, \quad (11)$$

полагая

$$C_{\rho}^{(k)} = \frac{C_{k\rho}}{\sqrt{\sum_{\sigma} |C_{k\sigma}|^2}}, \quad p_k = \sum_{\sigma} |C_{k\sigma}|^2. \quad (12)$$

При этом матрицы P_I и P_{II} выступают как определяющие смешанные состояния со статистическими весами p_k и p_{ρ} .

Мы видим, что полная система, несмотря на взаимодействие, остается в чистом состоянии, тогда как каждая из подсистем, рассматриваемых отдельно, в результате взаимодействия переходит из чистого состояния в смешанное. Таким образом, информация о полной системе остается максимальной, а информация о двух составляющих подсистемах перестает быть максимальной; ничего подобного нет в классической физике. Подсистему можно рассматривать как находящуюся в чистом состоянии, которое нам неизвестно, так что смешанное состояние есть выражение неполноты информации. Тогда простой констатации должно быть достаточно, чтобы ликвидировать эту неполноту и установить, с каким чистым состоянием мы имеем дело.

Для этого рассмотрим статистические матрицы P_I и P_{II} . Их вид показывает, что для каждой системы смесь определяется состояниями другой системы: об этом говорит то, что в выражении $(P_I)_{kl} = \sum_{\rho} p_{\rho} C_k^{(\rho)} C_l^{(\rho)*}$ суммирование производится по индексу ρ , характеризующему вторую систему. Поэтому лишь констатация состояния второй системы (т.е. фактически обнаруженное значение индекса ρ) позволит нам сказать, какое чистое состояние следует приписать первой системе. Но необходимо, чтобы эта констатация состояния второй системы могла проводиться без нарушения состояния данной второй системы, т.е. как макроскопическая констатация, аналогичная той, возможность которой предполагается в классической физике. Это важный вопрос, к которому мы еще вернемся.

Очевидно, что волновая функция Ψ полной системы I+II несет более полную информацию об этой системе, чем частные статистики P_I и P_{II} , относящиеся к каждой из этих систем. Функция Ψ и элементарная матрица P , которая ей соответствует, содержат статистические корреляции между системами I и II, тогда как матрицы P_I и P_{II} , даже рассматриваемые одновременно, таких корреляций не содержат. В частности, из выражений для P_I и P_{II} можно видеть, что знание матриц P_I и P_{II} не эквивалентно знанию всех отдельных величин $C_{k\rho}$. Рассматривая только матрицы P_I и P_{II} , мы отказываемся от неко-

торой информации, которую несет волновая функция Ψ . Эта потеря информации находит выражение в суммировании по индексу ρ в формуле для P_1 ; такое суммирование означает отказ от того, что мы могли бы знать о состоянии ρ системы II и о его связи с состоянием системы I. Потеря информации обнаруживается в появлении вероятностей, имеющих такой смысл, как в классической физике, т.е. обусловленных неполнотой наших знаний и характеризующих некое смешанное состояние.

3. КОЭФФИЦИЕНТЫ КОРРЕЛЯЦИИ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ МЕЖДУ ДВУМЯ КВАНТОВЫМИ СИСТЕМАМИ

Пусть у нас снова имеются две системы I и II, находящиеся во взаимодействии. Пусть $A^{(1)}$ и $B^{(2)}$ — две величины, характеризующие каждая свою систему, а $\alpha_k^{(1)}$, $\beta_l^{(2)}$ и $\varphi_k^{(1)}$, $\chi_l^{(2)}$ — собственные значения и собственные функции этих величин.

До взаимодействия мы имеем

$$\Psi = \sum_k c_k \varphi_k^{(1)} \sum_l d_l \chi_l^{(2)} = \sum_{k,l} c_k d_l \varphi_k^{(1)} \chi_l^{(2)}, \quad (13)$$

где $\sum_k |c_k|^2 = 1$ и $\sum_l |d_l|^2 = 1$. Величина $\overline{A^{(1)} B^{(2)}} - \overline{A^{(1)}} \cdot \overline{B^{(2)}}$, которая входит в числитель в формуле для коэффициента корреляции величин $A^{(1)}$ и $B^{(2)}$

$$r_{AB} = \frac{m_{AB} - m_A \cdot m_B}{\sigma_A \cdot \sigma_B},$$

равна здесь

$$\sum_{k,l} |c_k d_l|^2 \alpha_k^{(1)} \beta_l^{(2)} - \left(\sum_k |c_k|^2 \alpha_k^{(1)} \sum_l |d_l|^2 \beta_l^{(2)} \right) \left(\sum_l |d_l|^2 \beta_l^{(2)} \sum_k |c_k|^2 \alpha_k^{(1)} \right), \quad (14)$$

или

$$\sum_k |c_k|^2 \alpha_k^{(1)} \sum_l |d_l|^2 \beta_l^{(2)} - \sum_k |c_k|^2 \alpha_k^{(1)} \sum_l |d_l|^2 \beta_l^{(2)} = 0. \quad (15)$$

Следовательно, коэффициент корреляции равен нулю, как и должно быть. После взаимодействия волновая функция полной системы I+II будет равна

$$\Psi = \sum_{k,l} C_{kl} \varphi_k^{(1)} \chi_l^{(2)}, \quad (16)$$

причем

$$\sum_{k,l} |C_{kl}|^2 = 1,$$

и мы имеем

$$\begin{aligned} \overline{A^{(1)}} &= \int \Psi^* A^{(1)} \Psi dx_1 dx_2 = \\ &= \sum_{k,l,k',l'} C_{kl}^* C_{k'l'} \int \varphi_k^{(1)*} A^{(1)} \varphi_k^{(1)} dx_1 \int \chi_l^{(2)*} \chi_l^{(2)} dx_2 = \\ &= \sum_{k,l} |C_{kl}|^2 \alpha_k^{(1)}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\overline{B^{(2)}} = \sum_{k,l,k',l'} C_{kl}^* C_{k'l'} \int \varphi_k^{(1)*} \varphi_k^{(1)} dx_1 \int \chi_l^{(2)*} B^{(2)} \chi_l^{(2)} dx_2 = \sum_{k,l} |C_{kl}|^2 \beta_k^{(2)}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} A^{(1)} B^{(2)} &= \int \Psi^* A^{(1)} B^{(2)} \Psi dx_1 dx_2 = \\ &= \sum_{k,l,k',l'} C_{kl}^* C_{k'l'} \int \varphi_k^{(1)*} A^{(1)} \varphi_k^{(1)} dx_1 \int \chi_l^{(2)*} B^{(2)} \chi_l^{(2)} dx_2 = \\ &= \sum_{k,l} |C_{kl}|^2 \alpha_k^{(1)} \beta_l^{(2)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Следовательно,

$$\overline{A^{(1)} B^{(2)}} - \overline{A^{(1)}} \overline{B^{(2)}} = \sum_{k,l} |C_{kl}|^2 [\alpha_k^{(1)} \beta_l^{(2)} - \alpha_k^{(1)} \sum_{mn} |C_{mn}|^2 \beta_n^{(2)}]. \quad (20)$$

В общем случае эта величина отлична от нуля, так что коэффициент корреляции $r \neq 0$, т.е. в результате взаимодействия возникает корреляция.

4. ИЗМЕРЕНИЕ ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Мы рассматривали две взаимодействующие системы, из которых вторая была измерительным прибором. Но, чтобы можно было в результате измерения получить точное значение некоей величины, характеризующей первую систему, нужно, чтобы взаимодействие было особого рода. Другими словами, не всякое взаимодействие пригодно для измерения определенной величины, характеризующей первую систему. В самом деле, мы видели, что, констатируя (макроскопическим путем) состояние второй системы после измерения, можно установить, что первая система находится в некотором чистом состоянии. Но, поскольку в чистом состоянии физическая величина, вообще говоря, не имеет точного значения, мы в общем случае не получим значения интересующей нас величины первой системы.

Пусть A — физическая величина первой системы, которую мы хотим измерить. Возьмем в качестве базисных функций первой системы функции $u_k(x)$, являющиеся собственными функциями наблюдаемой A . Для того чтобы прибор был пригоден для измерения величины A , должна существовать некая величина B второй системы (например, положение стрелки на шкале), такая, что если $v_p(y)$ — ее собственные функции, то волновая функция Ψ полной системы после взаимодействия будет иметь вид

$$\Psi = \sum_{kp} C_{kp} u_k(x) v_p(y), \quad \text{где } C_{kp} = C_k \delta_{kp}, \quad (21)$$

т.е.

$$\Psi = \sum_k C_k u_k(x) v_k(y). \quad (22)$$

Тогда можно установить взаимно однозначное соответствие между v и u (скажем, между положением стрелки прибора и величиной A). Вычислим при таком предположении P_I . Имеем

$$C_k^{(\rho)} = \frac{C_{k\rho}}{\sqrt{\sum_l |C_{l\rho}|^2}} = \frac{C_k \delta_{k\rho}}{C_\rho}, \quad (23)$$

откуда

$$C_k^{(k)} = 1, \quad C_k^{(\rho)} = 0 \text{ при } \rho \neq k,$$

$$p_\rho = \sum_l |C_{l\rho}|^2 = \sum_l |\delta_{l\rho} C_l|^2 = |C_\rho|^2,$$

так что

$$(P_I)_{kl} = \sum_\rho p_\rho C_k^{(\rho)} C_l^{(\rho)*} = \sum_\rho p_\rho \delta_{k\rho} \frac{C_k}{C_\rho} \delta_{l\rho} \frac{C_l^*}{C_\rho^*} = \delta_{kl} p_k = \delta_{kl} |C_k|^2. \quad (24)$$

Следовательно P_I — диагональная матрица, диагональные элементы которой равны $|C_k|^2$. Легко видеть, что матрица P_{II} тождественна матрице P_I .

Итак, мы получаем смесь состояний, каждому из которых соответствуют два значения α_k и β_k , находящиеся между собой во взаимно-однозначном соответствии, причем вероятность пары значений α_k, β_k равна $|C_k|^2$. Таким образом, констатация значения β_k величины B (положения стрелки прибора) позволяет приписать величине A значение α_k , т.е. измерить ее. Констатация, которую мы считаем осуществимой микроскопически (путем прямого восприятия или регистрации при помощи прибора), уточняет то, что нам известно о величине A , показывая, какое из значений величины A в смеси, возникшей в результате взаимодействия, реализуется на самом деле.

Посмотрим теперь, при каких условиях требование (21) относительно вида функции Ψ может быть действительно выполнено. Предположим, что до измерения система II находится в состоянии $v_0(y)$, а система I — в состоянии $u_k(x)$. Тогда волновая функция полной системы имеет начальное значение

$$\Psi(x, y) = v_0(y) u_k(x). \quad (25)$$

Требование (21) относительно вида функции Ψ для конечного состояния будет выполняться в том случае, если в конце процесса взаимодействия, какова бы ни была собственная функция $u_k(x)$ в начальный момент, будет справедливо соотношение

$$\Psi(x, y) = u_k(x) v_k(y), \quad (26)$$

где $v_k(y)$ — собственная функция величины B , взаимно однозначно соответствующая функции $u_k(x)$. В самом деле, если начальное состояние характеризу-

ется не функцией $\Psi = v_0(y)u_k(x)$, а суперпозицией

$$\Psi(x, y) = \sum_k C_k v_0(y) u_k(x),$$

то в силу линейности волнового уравнения в конце взаимодействия волновая функция будет иметь вид

$$\Psi = (x, y) = \sum_k C_k u_k(x) v_k(y), \quad (27)$$

так что измерение величины A будет возможно. Далее мы приведем пример такого рода.

Важно, чтобы констатация конечного состояния измерительного прибора могла быть осуществлена макроскопически — путем прямого отсчета положения стрелки на шкале или в результате срабатывания электронного счетчика при попадании в него электрона и т.д. Это мы тоже увидим в рассматриваемом далее примере.

Эволюция волновой функции Ψ для всей системы протекает непрерывно в процессе измерения, причем полная система остается в чистом состоянии, а состояние каждой подсистемы становится определенным смешанным состоянием. Разрыв непрерывности происходит и возникает новая ситуация, когда наблюдатель, констатируя состояние системы II, приписывает системе I волновую функцию, соответствующую вполне определенному значению величины A . Мы видим, что именно сознание наблюдателя, констатирующего состояние измерительного прибора, дает возможность свести смесь состояний изучаемой системы, возникшую в результате взаимодействия, к одной из ее составляющих.

Этот очень тонкий вопрос о роли сознания наблюдателя подробно разбирался, в частности, фон Нейманом. Я приведу резюме его анализа, которое было дано Лондоном и Бауэром в их работе, опубликованной в одном из выпусков "Actualités scientifiques".

Рассмотрим три системы: изучаемый объект x , измерительный прибор y и наблюдателя z , образующие единую полную систему. Опишем ее волновой функцией

$$\Psi(x, y, z) = \sum_k C_k u_k(x) v_k(y) w_k(z). \quad (28)$$

Если мы будем рассматривать как объект полную систему, то она будет в чистом состоянии, которое все время остается чистым, а каждая из подсистем x, y, z будет находиться в смешанном состоянии. Функция Ψ в этом случае дает «максимальные» сведения о полной системе, не давая точной информации о состоянии объекта x .

Но наблюдатель стоит на другой точке зрения: для него к внешней объективной реальности относятся лишь объект x и измерительный прибор. Сам же он находится в совершенно особом положении, так как обладает сознанием или способностью интроспекции, что дает ему возможность непосредственно знать свое состояние. Именно в силу такого непосредственного знания он считает себя вправе создать свою собственную объективность, разорвав цепь статистических связей, выражаемых функцией Ψ , и констатировав: «я на-

хожусь в состоянии w_k , значит, измерительный прибор находится в состоянии v_k , а объект — в состоянии u_k , что позволяет приписать определенное значение величине A , для которой u_k — собственная функция, т.е. измерить величину A ».

«Таким образом, — говорят Бауэр и Лондон, — вовсе не некое таинственное взаимодействие между прибором и объектом вызывает при измерении появление новой волновой функции Ψ системы. Это лишь сознание моего Я, которое отделяет себя от старой функции $\Psi(x, y, z)$ и *создает новую объективность* в силу осознанности своих наблюдений, приписывая объекту новую волновую функцию $u_k(x)$ »¹⁾.

Необходимо отметить, что причиной квантовых неопределенностей нельзя считать неопределенности в состоянии наблюдателя. Даже если допустить, что наблюдатель может точно учесть свое состояние, т.е. если, например, он совершенно не делает (субъективной) ошибки при отсчете показания прибора, то все-таки останутся квантовые неопределенности, связанные с невозможностью найти систему собственных функций $u_k(x)$, общую для двух некоммутирующих величин. Отсюда ясно, в чем состоит различие между квантовой неопределенностью и простой ошибкой наблюдения.

Мы видим, сколь глубока и трудна проблема изложенной интерпретации процесса измерения. В связи с ней возникают самые разнообразные философские вопросы, которые полностью еще не решены. В частности, она показывает (как неоднократно подчеркивал Бор), насколько трудно в квантовой теории провести точную границу между объективным и субъективным, поскольку объективное в какой-то степени создается сознанием наблюдателя.

Один из деликатных моментов такой интерпретации состоит в следующем: если объективная реальность создается сознанием наблюдателя, то не меняется ли такая реальность от одного наблюдателя к другому? Несомненно, что этого нет, так как иначе никакая коллективная наука, никакая наука, общая для всех людей, не была бы возможна. В связи с этим необходимо отметить, что констатация, позволяющая провести измерение, — это констатация макроскопическая, которая не влияет на наблюдаемые явления: так, например, отсчет положения стрелки по шкале прибора является макроскопической констатацией, и взгляд, который наблюдатель бросает на шкалу прибора, чтобы определить положение стрелки, не оказывает влияния на саму систему. Поэтому ничто не мешает другим наблюдателям также провести аналогичные

¹⁾ Вот как несколько лет спустя Луи де Бройль комментировал *эту же самую* цитату:

«Я цитировал этот текст, но не очень хорошо понимаю его: фраза «мое Я, которое отделяет себя от волновой функции», мне кажется гораздо более таинственной, чем какое бы то ни было взаимодействие между объектом и измерительным прибором. Можно понять иронический каламбур Шредингера: «Теория волны Ψ становится психологической». Ничего особенного не следует и из того, что такие рассуждения согласуются с мнением Бора, который считает, что в квантовой физике уже нельзя провести резкую грань между объективным и субъективным, ибо это его утверждение малопонятно и ничего не объясняет. Чем больше размышляешь об этом, тем глубже впечатление, что всю эту интерпретацию нужно пересмотреть на другой основе». — Ж.Л.

операции, и опыт показывает, что с точностью до ошибок наблюдения все наблюдатели приходят к одному и тому же результату. Это обстоятельство дает возможность отвлечься от личности наблюдателя и создать объективную науку. Короче говоря, в смешанном состоянии, которое возникает при взаимодействии изучаемого объекта с измерительным прибором, имеется только одна возможность, которую обнаруживают реализованной все наблюдатели.

Еще раз вернемся к рассуждениям Лондона и Бауэра. В классической физике считается, что система обладает в каждый момент однозначной непрерывно изменяющейся совокупностью свойств, которые определяются измеряемыми величинами, имеющими вполне определенные значения. Именно возможность установления этой непрерывности и эта точность в определении величин, характеризующих систему, рассматривалась, вообще говоря, как доказательство того, что физика изучает «объективную реальность», свойства которой не зависят от наблюдателя. В противоположность этому в квантовой микрофизике объект выступает как носитель не точно измеряемых величин, а совокупности потенциально возможных статистических распределений, характеризующих измеряемые величины, распределений, каждое из которых вступает в силу лишь с момента измерения соответствующей величины. Если отвлечься от всех измерений, то не имеет смысла считать, что величины, сопоставляемые с объектами, имеют определенные значения. Мы видели (в частности, это следует из общих рассуждений фон Неймана), что это не позволяет делать математическая форма вероятностных распределений, поскольку ни в одном состоянии объекта все величины одновременно не могут быть без дисперсии.

Это не мешает нам предсказывать и интерпретировать результаты экспериментов. Квантовая теория учит нас, каким образом мы можем приготовить чистое состояние для некоей величины, т.е. состояние, в котором повторные измерения рассматриваемой величины дают один и тот же результат. Она также говорит нам, каким образом нужно проводить измерения для проверки теоретических предсказаний. Квантовая теория чрезвычайно хорошо приспособлена для изучения проблем, которые ставит опыт, и не дает ответа на надуманные вопросы, которые не имеют отношения к опыту.

В квантовой микрофизике понятие объективности оказывается несколько иным, нежели в классической физике. Здесь уже больше нельзя видеть объективность в возможности всегда приписать величинам, сопоставляемым с объектом, вполне определенные значения. Здесь в понятие объективности входят: наличие соответствующих свойств объекта в момент опыта, возможность получения для измеряемых величин значений, соответствующих статистическим предсказаниям теории, и одинаковые результаты констатации для всех наблюдателей в момент измерения. В предельном случае макроскопических явлений мы, естественно, приходим к классическому понятию объективности¹⁾.

¹⁾ В предшествующей части книги мы развернули систему взглядов на волновую механику, которые уже более 20 лет считаются общепринятыми и которые мы, следуя работам фон Неймана и их краткому изложению Бауэра и Лондона, попытались развить, доведя до крайних логических выводов. Несомненно, что все эти представления, столь

Не останавливаясь больше на этих вопросах, о которых можно очень много говорить, мы на одном примере поясним суть процесса измерения физической величины.

5. ПРИМЕР ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИЗМЕРЕНИЯ ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Мы видим, что любой процесс измерения должен удовлетворять следующим трем требованиям: 1) он должен включать в себя взаимодействие между объектом и измерительным прибором, 2) после своего завершения он должен приводить систему «объект + измерительный прибор» в конечное состояние, в котором имеется взаимно-однозначное соответствие между значениями измеряемой величины и состояниями измерительного прибора, 3) он должен давать возможность наблюдателю определить путем макроскопической констатации конечное состояние измерительного прибора.

Типичным измерением такого вида является проанализированное фон Нейманом измерение магнитного момента атома методом Штерна и Герлаха. При таком методе магнитный момент определяется по отклонению атома в неоднородном магнитном поле. Определяется проекция магнитного момента атома на направление магнитного поля. Координаты y положения центра тяжести атома будут играть здесь роль положения стрелки прибора, если эти

непривычные для старых физиков и столь трудно поддающиеся точному определению из-за своего слишком «философского» внешнего вида, неизбежно возникают, как только мы принимаем, что знаем волны ψ , ценность которой как инструмента статистических предсказаний неоспорима, исчерпывается все то, что мы можем знать о физической реальности и что все распределения вероятностей, которые вычисляются на основе ψ в соответствии с общими принципами, связанными с вероятностной интерпретацией волновой механики, потенциально существуют в состоянии, определяемом волновой функцией ψ . В результате возникает теория, все наблюдаемые предсказания которой при нынешнем уровне наших знаний представляются строго и точно выполняющимися и которая позволяет ответить на все вопросы физика. Но, сводя описание реальности к величине ψ , являющейся лишь формой представления вероятностей, изменяющихся в зависимости от состояния знаний исследователя, работающего с ней, мы с неизбежностью приходим к «субъективистской» интерпретации, которая с большей или меньшей степенью явности подвергает объективность физического мира, достойным сожаления образом поддается «философскому» пустословию и вынуждает видеть в согласии наблюдений разных наблюдателей некую «предустановленную гармонию», причина которой остается загадочной.

Некоторые ученые и, в частности, Эйнштейн отказываются рассматривать принятую интерпретацию квантовой физики как окончательную. Приводя доводы, нередко заставляющие задуматься, Эйнштейн доказывал, что, хотя метод, основанный на функции ψ , носящей статистический характер, и приводит к несомненно точным результатам, тем не менее он дает не *полное* описание физической реальности, а лишь статистический ее аспект, который пока еще далеко не точен. Более полное описание того типа, к которому стремился Эйнштейн, возможно, даст теория волны-пилота (в форме двойного решения), вернув тем самым квантовую физику к более объективным и более точным понятиям. Будущее покажет, так ли это. — Л.Б.

координаты можно будет определить путем макроскопического наблюдения¹⁾.

Внутренние координаты атома — это координаты x объекта. Проекция магнитного момента атома на направление магнитного поля характеризуется оператором $M(x, p_x)$. Волновое уравнение в рассматриваемом случае имеет следующий вид:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \Delta_y + H_0(x, p_x) + (M(x, p_x), F(y)) \right\} \psi(x, y, t) = \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Здесь H_0 — гамильтониан атома в отсутствие поля после отделения переменных центра тяжести; оператор $(-\hbar^2/8\pi^2 m)\Delta_y$ соответствует кинетической энергии центра тяжести, (M, F) — энергия взаимодействия магнитного поля с магнитным моментом атома. Так как магнитное поле F постоянно, т.е. не зависит от y , движение центра тяжести отделяется от внутреннего состояния объекта и последнее характеризуется уравнением на собственные значения

$$\{H_0 + (M, F)\} u_k(x) = E_k u_k(x). \quad (29)$$

Предположим, что атом находится в состоянии с минимальной энергией. Если это состояние вырождено, то, согласно квантовой теории эффекта Зеемана,

$$E_k = E_0 + (k\mu/j)F, \quad (30)$$

где E_0 — энергия основного состояния в отсутствие поля, μ — магнитный момент атома, j — полный угловой момент атома (включая спин) в единицах $\hbar/2\pi$, а k — магнитное квантовое число, которое может принимать значения $-j, -j+1, \dots, +j-1, +j$.

Если магнитное поле F не постоянно, то собственные значения имеют вид

$$E_k(y) = E_0 + \frac{k\mu}{j} F(y). \quad (31)$$

Они зависят от локального значения F , и то же самое можно сказать о соответствующих собственных функциях $u_k(x, y)$. Но на практике возмущение функций u_k локальными изменениями магнитного поля является настолько слабым, что их можно оставить в виде $u_k(x)$.

Волновую функцию, рассматриваемую как функция координаты x , можно

¹⁾Как нетрудно видеть, Луи де Бройль еще сохранял традиционный способ выражения, который несколько лет спустя сам будет критиковать: все время упоминается измерительный прибор, обо всем говорится в форме достаточно расплывчатой и искусственной, поскольку слишком большое внимание уделяется акту регистрации. Между тем позднее он сам показал, что наиболее существенным актом в процессе измерения физической величины, действительно вносящим возмущение в систему, является подготовка, состоящая в разделении начальной волны на отдельные волновые пакеты при помощи анализатора, выбранного соответственно измеряемой величине. Измерение в собственном смысле этого слова сводится тогда к констатации наличия частицы в одном из пакетов волн, выходящих из анализатора. — Ж.Л.

Волновую функцию, рассматриваемую как функция координаты x , можно разложить в ряд по $u_k(x)$, так что

$$\psi(x, y, z) = \sum_k v_k(y, t) u_k(x). \quad (32)$$

Подставляя это разложение в волновое уравнение, с учетом равенства $(H_0 + (M, F))u_k = E_k u_k$ находим

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \Delta_y + E_k(y) \right\} v_k(y, t) = \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial v_k(y, t)}{\partial t}. \quad (33)$$

Это — волновое уравнение, описывающее движение только центра тяжести, причем $E_k(y)$ в нем играет роль потенциала. Из выражения для $E_k(y)$ можно видеть, что при каждом значении k будет свое отклонение электронного пучка; он может отклоняться либо в направлении магнитного поля, либо в противоположном направлении в зависимости от знака k . Отклонение может также равняться нулю, если для k возможно нулевое значение (j — целое). Если, например (при $j = 1$), квантовое число k может принимать значения $-1, 0, +1$, то начальный пучок атомов делится на три пучка в соответствии со схемой, изображенной на рис. 14.

Пусть $v_0(y)$ — волновая функция, характеризующая движение центра тяжести атома перед измерением, а $\sum_k C_k u_k(x)$ — внутренняя волновая функция атома ($\sum_k |C_k|^2 = 1$). Тогда начальная волновая функция ψ для атома перед входением в зону действия магнитного поля будет иметь вид

$$\psi(x, y) = v_0(y) \sum_k C_k u_k(x).$$

Мы только что видели, что если начальная волновая функция ψ дается выражением $v_0(y) u_k(x)$, то эволюция функции $v_k(y, t)$ относительно начального вида $v_0(y)$ во время процесса измерения определяется индексом k . В силу линейности волнового уравнения волновая функция системы, имевшая начальный вид $v_0(y) \sum_k C_k u_k(x)$, будет иметь конечный вид

$$\Psi(x, y) = \sum_k C_k v_k(y) u_k(x),$$

так что будет существовать взаимно однозначное соответствие между значениями величины M и конечным движением центра тяжести атома.

Но мы видели, что, выходя из зоны действия поля, центр тяжести атома оказывается в *разных областях пространства* при разных значениях индекса k . Поэтому путем макроскопической констатации можно будет установить, какое значение индекса k реализуется для центра тяжести атома, и тем самым определить его магнитный момент. Предположим, например, что $k = 0$ или $k = \pm 1$. Тогда у нас будут три возможных направления движения для атома, выходящего из магнитного поля. Если установить экран перпендикулярно начальному пучку атомов и проделать в экране три отверстия, соответствующие трем возможным отклонениям атомов, то, поместив за каждым из отверстий устройство, которое могло бы срабатывать при попадании в него атома (на-

пример, счетчик электрических зарядов, если атомы заряжены), мы можем макроскопическим путем констатировать, какое из них срабатывает, и на

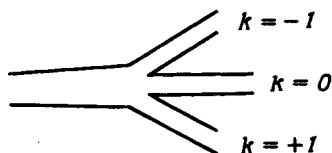


Рис. 14

этом основании установить, какое из трех значений k оказывается реализованным на выходе из магнитного поля, а тем самым определить значение магнитного момента, которое атом будет иметь после измерения. Разумеется, можно заменить счетчики одной фотопластинкой, наложенной на экран, поскольку всякую чувствительную область фотопластинки можно рассматривать как некий счетчик, допускающий макроскопическую констатацию.

Рассматривая по-прежнему случай трех возможных значений 0 и ± 1 для числа k , мы можем сказать, что перед измерением коэффициенты волновой функции полной системы $x + y$ имеют вид (k — индекс столбцов, а ρ — строк матрицы)

$$C_{k\rho} = C_k \delta_{\rho 0} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C_{-1} & C_0 & C_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (\Psi = \sum_k C_k v_0 u_k), \quad (34)$$

а после измерения мы имеем

$$C'_{k\rho} = C_k \delta_{k\rho} = \begin{vmatrix} C_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & C_0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{vmatrix} \quad (\Psi = \sum_k C_k v_k u_k). \quad (35)$$

Перед измерением статистические матрицы P_I и P_{II} соответствуют чистым состояниям и имеют вид

$(P_I)_{\rho\sigma} = \sum_k C_{\rho k} C_{\sigma k}^*$; $(P_{II})_{\rho\sigma} = \sum_k C_{k\rho} C_{k\sigma}^*$, а именно:

$$P_I = \begin{vmatrix} C_{-1} C_{-1}^* & C_{-1} C_0^* & C_{-1} C_1^* \\ C_0 C_{-1}^* & C_0 C_0^* & C_0 C_1^* \\ C_1 C_{-1}^* & C_1 C_0^* & C_1 C_1^* \end{vmatrix}, \quad P_{II} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (36)$$

После прохождения атома через неоднородное магнитное поле они принимают вид

$$P_I = \begin{vmatrix} |C_{-1}|^2 & 0 & 0 \\ 0 & |C_0|^2 & 0 \\ 0 & 0 & |C_1|^2 \end{vmatrix}, \quad P_{II} = \begin{vmatrix} |C_{-1}|^2 & 0 & 0 \\ 0 & |C_0|^2 & 0 \\ 0 & 0 & |C_1|^2 \end{vmatrix} = P_I, \quad (37)$$

что ясно показывает наличие взаимно однозначного соответствия между u_k и v_k , установившегося в результате взаимодействия между x и y .

В связи с рассмотренным примером можно сделать следующее интересное замечание. Если пропустить через магнитное поле в установке типа Штерна — Герлаха не один атом, а пучок одинаковых атомов, то мы получим за каждым из отверстий в экране пучок атомов, имеющих одинаковую ориентацию магнитного момента. Таким образом, подобная установка дает возможность формировать чистые состояния для составляющей магнитного момента в направлении поля, причем здесь не требуется какой-либо констатации наблюдателем. В этом можно увидеть противоречие тому, что говорилось выше о важном значении констатации, осуществляемой наблюдателем. Но нужно учитывать, что здесь нет речи о том, чтобы приписать некое значение магнитного момента некоему определенному атому, т.е. здесь не производится «измерение» магнитного момента атома. Речь идет о том, чтобы получить пучок атомов с одинаковой магнитной ориентацией: магнит типа Штерна — Герлаха, играя роль фильтра, дает чистые состояния в «анонимной» форме, тогда как любое измерение физической величины, характеризующей определенный объект, требует макроскопической констатации.

6. ОТДЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО ПОВОДУ ИЗМЕРЕНИЯ

Как мы видели, для того чтобы некое устройство могло служить измерительным прибором, волновая функция системы «объект + устройство» после взаимодействия должна иметь вид

$$\psi(x, y) = \sum_k c_k u_k(x) v_k(y).$$

Вернемся к рассуждениям, которые позволили нам определить смешанное состояние, возникающее в результате взаимодействия (с. 284). Пусть A — оператор, соответствующий некой величине, связанной с объектом, который предполагается изолированным, и пусть $\psi(x) = \sum_k c_k u_k(x)$. Тогда

$$\bar{A} = \int_D \psi^* A \psi dx = \sum_{kl} c_k^* c_l \int_D u_k^* A u_l dx = \sum_{kl} c_k^* c_l A_{kl} \quad (38)$$

есть среднее значение, соответствующее элементарной статистической матрице

$$P_{lk} = c_k^* c_l, \quad \bar{A} = \text{Tr}(PA). \quad (39)$$

Здесь $\text{Tr}P = 1$ и $P^n = P$.

После же взаимодействия мы имеем

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \int_D \psi^* A \psi dx dy = \int_D \sum_k c_k^* u_k^* v_k^* A \sum_l c_l u_l v_l dx dy = \sum_{kl} c_k^* c_l \int u_k^* A u_l dx \int v_k^* v_l dy = \\ &= \sum_{kl} c_k^* c_l A_{kl} \delta_{kl} = \sum_k |c_k|^2 A_{kk}, \quad (40) \end{aligned}$$

что соответствует элементарной статистической матрице

$$(P_1)_{kl} = \delta_{kl} |c_k|^2. \quad (41)$$

По-прежнему $\text{Tr} P_1 = 1$, но равенство $P_1^2 = P_1$ теперь не выполняется.

Сравним два выражения для A

$$\sum_{kl} c_k^* c_l A_{kl}, \quad \sum_k |c_k|^2 A_{kk},$$

мы увидим, что второе получается из первого, если сохранить лишь диагональные члены. Отсюда следует, что, в то время как первое выражение зависит от разности фаз между c_k , второе от них не зависит; можно также сказать, что второе выражение получается из первого усреднением по значениям фаз, которые все предполагаются равновероятными. Таким образом, мы снова встречаемся с потерей информации о фазах при измерении и ясно видим, как она связана с преобразованием чистого состояния в смешанное в результате взаимодействия, на котором основано измерение¹⁾.

Анализируя измерения, проводимые методом Штерна — Герлаха, мы отметили, что неправильно говорить (как это делают Лондон и Бауэр), что положение центра тяжести атома играет роль стрелки измерительного прибора, поскольку оно не воспринимается непосредственно нашими органами чувств: констатировать можно лишь макроскопический эффект (ток разряда в счетчике, почернение фотопластинки и т.д.), обусловленный определенным положением атома. В более общей форме можно сказать, что всякий процесс измерения в конечном счете связан с неким макроскопическим эффектом, обусловленным определенной локализацией микроскопического элемента. Например, если рассмотреть столкновение частицы 1 с частицей 2, в котором каждой частице в начальный момент соответствует узкий пучок волн ψ , то после столкновения будет целый ряд возможных результатов с разными значениями пере-

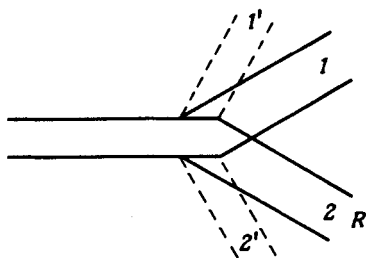


Рис. 15

¹⁾Автор подробно рассмотрит этот процесс в своей работе по теории измерений [11, 27], где покажет, что стирание фаз происходит при регистрации присутствия частицы в одном из волновых пакетов, выходящих из спектрального анализатора. — Ж.Л.

даваемых энергии и импульса, и движения двух частиц в конечном состоянии будут коррелированы¹⁾.

Если после столкновения частица 1 связана с пучком 1, то частица 2 связана с пучком 2, а если частица 1 связана с пучком 1', то частица 2 связана с пучком 2', и т.д. Если частица 2 локализуется в области R пространства, вызывая доступный наблюдению макроскопический эффект, то на этом основании можно определить состояние движения частицы 1, которое будет «коррелировано» с состоянием движения, которое на основании наблюдения было приписано частице 2. Здесь частица 2 служит для измерения характеристик движения частицы 1, причем локализация частицы 2 в области R полностью изменяет состояние частицы 2, не влияя на состояние частицы 1. Эта локализация лишь позволяет установить, какое из чистых состояний в конечном смешанном состоянии частицы 2 фактически реализовано. Роль стрелки измерительного прибора в данном случае играет не положение частицы 2, которое само по себе ненаблюдаемо, а макроскопический эффект, констатируемый нашими органами чувств, вызываемый локализацией частицы 2 в области R .

Таким образом, полная теория измерений в микрофизике не должна ограничиваться анализом эволюции системы микроскопических частиц, которые вступают во взаимодействие при измерении. Она должна связывать эту эволюцию с эффектами, которые непосредственно доступны нашим органам чувств и которые в некотором смысле играют роль стрелки прибора. Каким же образом осуществляется это в теории измерений? Мы специально обращаем внимание на этот вопрос, который обычно оставляется в стороне при его традиционном рассмотрении.

Чтобы лучше разобраться в этом, поставим следующий вопрос. Каким образом можно перейти от микрофизических величин, рассматриваемых в волновой механике, к величинам, непосредственно наблюдаемым при помощи наших органов чувств? Ответ состоит в том, что связь осуществляется через посредство средних значений. Пусть имеется микроскопическая система S и пусть A — измеряемая величина, сопоставляемая с этой системой. Величина A может принимать ряд квантовых значений, и ее среднее значение (математическое ожидание) будет равно \bar{A} , но отдельное значение величины A непосредственно не может быть оценено нашими органами чувств. Если же вместо того чтобы рассматривать одну систему S , мы имеем дело с громадным числом \mathcal{N} систем, тождественных с S , то мы можем непосредственно наблюдать (по крайней мере в благоприятных случаях) макроскопическую величину $A_{\text{макр}} = \mathcal{N}\bar{A}$. Локализация микроскопической частицы, сама по себе ненаблюдаемая, может сопровождаться взаимодействием с очень большим числом других элементарных частиц, что приводит к появлению макроскопически наблюдаемой величины указанного выше вида.

Рассмотрим, например, волну ψ , соответствующую электрону, который падает на плоскую фотопластинку. Априори электрон может с равной вероят-

¹⁾Эти замечания носят фундаментальный характер, поскольку они предвещают последующую теорию измерений де Бройля. — Ж.Л.

ностью (если падающая волна является плоской) попасть в любую точку фотопластинки. Тогда внезапно в некоторой точке светочувствительного слоя возникнет макроскопически наблюдаемое (скрытое) фотографическое изображение: электрон [будет локализован¹⁾ в этой точке пластинки. В действительности рассматриваемая «точка» чувствительного слоя фотопластинки представляет собой очень малую область, содержащую громадное число атомов эмульсии, и [локализация²⁾ электрона в этой малой области сопровождается очень большим числом актов ионизации атомов в этой области фотопластинки, вызывающих локальную химическую реакцию, которая приводит к образованию локального скрытого фотографического изображения. Это и есть макроскопически констатируемый эффект, вызванный локализацией электрона.

Попытаемся рассмотреть данный вопрос, опираясь на анализ, основанный на методах волновой механики.

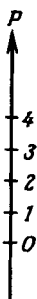


Рис. 16

Пусть P — плоскость фотопластинки. Будём отсчитывать переменные в направлении стрелки. Падающий электрон характеризуется переменной x . Чувствительная фотопластинка разделена на очень малые области 1, 2, Пусть y — переменная, характеризующая положение i -й рассматриваемой области. По-видимому, можно взять бесконечное число областей, так что y_i будет непрерывной переменной. Но возможно, что мы будем ближе к физической реальности, если переменную y_i будем рассматривать как дискретную (во всяком случае это облегчит вычисления). Каждая локальная область чувствительного слоя, характеризуемая координатой y_i , содержит громадное число

¹⁾Автор позднее заменил слова «будет локализован» словами «обнаружит себя». Поправка очень важная, поскольку в первом выражении подразумевается, что электрон, потенциально присутствующий во всех точках волны, локализуется актом наблюдения (теория Бора), тогда как второе выражение означает, что частица уже находится в некоторой точке волны, а акт наблюдения лишь обнаруживает ее присутствие (теория де Бройля). — Ж.Л.

²⁾Позднее автор заменил слово «локализация» словом «присутствие», очевидно, по тем же мотивам, что и в предыдущей поправке (обе поправки сделаны карандашом и, вероятно, в одно и то же время). — Ж.Л.

атомов эмульсии: через z_i мы обозначим совокупность большого числа координат, описывающих эти атомы. Нормальное состояние i -й области характеризуется волновой функцией $v_0^{(i)}(z_i)$. Волновая функция полной системы «падающий электрон + фотопластинка» в начальный момент имеет вид $\psi_0(x, z_i) = u_0(x)v_0^{(1)}(z_1)v_0^{(2)}(z_2)\dots v_0^{(n)}(z_n)$ (если всего n областей). Здесь $u_0(x)$ — волновая функция, описывающая начальное состояние электрона (или, скорее, значения этой волновой функции на пластинке); поэтому $u_0(x)$ будет константой, если волна падающего электрона ψ является плоской волной, которая падает по нормали на пластинку, и она будет равна $(1/r) \exp(ikr)$, если электроны испускаются с заданной энергией равномерно во все стороны от точечного источника, причем r — расстояние от точки пластинки до этого источника.

Взаимодействие электрона с чувствительным слоем приводит к тому, что ψ для системы принимает следующий вид:

$$\psi = \sum_i u_0(y_i) \delta(x - y_i) v_1^{(i)}(z_i) v_0^{(1)}(z_1) \dots v_0^{(i-1)}(z_{i-1}) v_0^{(i+1)}(z_{i+1}) \dots v_0^{(n)}(z_n). \quad (42)$$

В самом деле, электрон, обнаруживаясь, например, в i -й области [что дает возможность приписать ему волновую функцию $\delta(x - y_i)$], вызывает сложные процессы ионизации атомов этой области, что позволяет приписать волновой функции i -й области вид $v_1^{(i)}(z_i)$, соответствующий данному состоянию ионизации. Но это возможно в любой из n областей, причем вероятность того, что это будет иметь место в i -й области, равна $|u_0(y_i)|^2$, поскольку, согласно принципу интерференции,

$$\int |\psi|^2 dx dz_1 \dots dz_n = \sum_i |u_0(y_i)|^2 = 1.$$

Пусть теперь B_j — измеримая величина (которая, однако, непосредственно не наблюдается с помощью наших органов чувств), связанная с одним из микроскопических элементов j -й области. Например, это может быть компонента ρv_x вектора тока, соответствующего одному из электронов в j -й области, который в результате ионизации потерял связь с атомом.

По общей формуле среднее значение величины B_j будет равно

$$\bar{B}_j = \int \psi^* B_j \psi dx dz_1 \dots dz_n = |u_0(y_i)|^2 (B_j)_{11} + \sum_{i \neq j} |u_0(y_i)|^2 (B_j)_{00}, \quad (43)$$

что легко видеть, если учесть нормировку функций $v_0^{(i)}$ и воспользоваться обычными определениями

$$(B_j)_{11} = \int v_1^{(i)*}(z_j) B_j v_1^{(i)}(z_j) dz_j, \quad (44)$$

$$(B_j)_{00} = \int v_0^{(i)*}(z_j) B_j v_0^{(i)}(z_j) dz_j.$$

Наблюдаемый эффект (ток ионизации в направлении x , если $B_j = \rho v_x$, и т.д.) будет пропорционален величине \bar{B}_j . В самом деле, поскольку каждая из областей 1, 2, ..., n содержит бесконечное число одинаковых микрофизических систем (атомов, электронов и т.д.), эффект, вызванный локализацией атома в

j -й области, будет пропорционален среднему значению B_j , а это среднее значение допускает макроскопическую констатацию.

Можно допустить, что среднее значение $(B_j)_{00}$ величины B_j в j -й системе, находящейся в начальном состоянии, равно нулю. Величина же $(B_j)_{11}$, относящаяся к ионизированному состоянию, вызванному действием электрона, будет отлична от нуля. Если макроскопически констатируется, что среднее значение $\bar{B}_j \neq 0$, то отсюда следует, что электрон был локализован в j -й области. Таким образом, мы измерим координату x электрона по допускающему макроскопическую констатацию эффекту (скрытого) фотографического изображения, возникающего в малой области фотопластинки.

Поставив в соответствие индекс i функции $\delta(x - y_i)$, а индекс n_j (принимающий значение 0 или 1) — волновой функции $v^{(j)}(z_j)$ для j -й области, получим, что коэффициенты при произведениях $\delta(x - y_i)v_0^{(1)}(z_1)\dots v_1^{(j)}(z_j)\dots$ в разложении функции ψ имеют вид

$$C_{in_1\dots n_n} = u_0(y_i)\delta_{n_1,0}\dots\delta_{n_i,1}\dots, \delta_{n_n,0}, \quad (45)$$

откуда

$$\sum_{n_1,\dots,n_n} |C_{in_1\dots n_n}|^2 = |u_0(y_i)|^2. \quad (46)$$

Это — веса состояний $\delta(x - y_i)$, относящихся к электрону, в смешанном состоянии, соответствующем данной функции ψ после взаимодействия электрона с фотопластинкой. Преобразование начального чистого состояния электрона в смешанное состояние с весами $|u_0(y_i)|^2$, вызванное взаимодействием, соответствует возможности фиксировать локализацию частицы путем макроскопической констатации, относящейся к среднему значению величины B_j . Изложенное позволяет лучше понять, почему определение смешанного состояния, образующегося в результате взаимодействия с измерительным аппаратом, должно быть тесно связано с определением средних значений¹⁾.

¹⁾(Карандашная пометка.) Важное значение локализации. Первичный характер q -представления. — Л.Б.

(Запись на отдельном листке.) Рассуждения, которые мы только что изложили, по-видимому, показывают, что *всякое* измерение осуществляется путем определения локализации, т.е. путем констатации присутствия частицы в малой области пространства. Отсюда следует, что определение локализации есть *прямое* измерение, а все другие измерения (например, импульса) суть косвенные, требующие констатации локализации.

Из этого, по-видимому, явствует, что (в согласии с представлениями теории волны-пилота) плотность вероятности присутствия в определенной точке $|\psi(x)|^2$ имеет более непосредственный характер, чем другие плотности вероятности, вводимые в волновой механике. Другими словами, p -представление имеет менее прямой физический смысл, чем q -представление. — Л.Б.

Второе из этих примечаний автора, по-видимому, было сделано значительно позже первого и свидетельствует по крайней мере о третьем прочтении текста. Выраженная здесь мысль была позже подробно развита автором [II, 27, с. 81; 29, с. 51; 33, с. 21 и 164]. То, что здесь идет речь о теории волны-пилота, а не о теории двойного решения, не имеет значения, поскольку рассуждения остаются теми же самыми, если не считать интерпретации характера волны. — Ж.Л.

7. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОДХОД ФОН НЕЙМАНА

С помощью оператора P нам удалось выразить статистический аспект совокупности тождественных систем, распределенных (в классическом смысле) по различным состояниям (в смысле волновой механики). Это делает вероятным наличие связи между матрицей P и величинами, рассматриваемыми в статистической термодинамике. Фон Нейман исследовал подобного рода вопросы в последней части своей знаменитой книги. Данная проблема трудна для изучения, и, несомненно, в этом направлении должны быть проведены более глубокие исследования. Определенные попытки продвинуться вперед сделал Ватанабе в своей диссертации, но здесь, вне всякого сомнения, осталось много работы и для будущих исследователей. Мы ограничимся тем, что произведем краткое изложение Бауэра и Лондона.

Прежде всего напомним некоторые моменты классической статистической термодинамики. Больцман установил следующее соотношение между энтропией ансамбля и вероятностью некоего состояния этого ансамбля:

$$S = k \ln P, \quad (47)$$

где k — постоянная Больцмана, численное значение которой в системе СГС равно $1,37 \cdot 10^{-16}$.

Это фундаментальное соотношение подтверждается всем огромным множеством возможных проверок вытекающих из него следствий. Численное значение постоянной k определяется тем, что при применении формулы Больцмана в кинетической теории газа оказывается, что величина k должна равняться газовой постоянной R , взятой в расчете на один моль, деленной на число Авогадро, так что k есть газовая постоянная, отнесенная к одной молекуле:

$$k = \frac{R}{N} = \frac{8,31 \cdot 10^7}{6 \cdot 10^{23}}.$$

Если мы теперь рассмотрим совокупность \mathcal{N} систем, распределенных по некоторому числу состояний (в классическом смысле) таким образом, что имеется n_i систем в состоянии i , то легко найдем, что вероятность такого распределения будет равна

$$P = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots} = \frac{N!}{\prod_i n_i!}.$$

Здесь N и n_i предполагаются очень большими, в связи с чем формула Стирлинга дает для $N!$ и $n_i!$ приближенные значения

$$N! \approx e^{-N} N^N, \quad n_i! \approx e^{-n_i} n_i^{n_i},$$

откуда следует

$$\ln N! \approx N \ln N - N, \quad \ln n_i! \approx n_i \ln n_i - n_i,$$

или

$$\ln P = \ln N! - \sum_i \ln n_i! \approx N \ln N - \sum_i n_i \ln n_i. \quad (48)$$

Положим $p_i = n_i/N$, где p_i — доля систем, находящихся в состоянии i (или вес состояния i в статистическом распределении). Мы имеем

$$\ln P = -N \sum_i p_i \ln p_i + N \ln N - N \sum_i p_i \ln N = -N \sum_i p_i \ln p_i, \quad (49)$$

поскольку $\sum_i p_i = 1$.

Следовательно, согласно формуле Больцмана,

$$S = -kN \sum_i p_i \ln p_i, \quad (50)$$

что приводит к известной формуле классической статистической термодинамики.

Чтобы построить квантовую термодинамику, мы должны изменить определение энтропии и понимать термин «состояние системы» в смысле волновой механики, т.е. характеризовать состояние волновой функцией. Если различные состояния \mathcal{N} систем соответствуют волновым функциям $\varphi_1, \dots, \varphi_p, \dots$, являющимся, например, собственными функциями наблюдаемой величины и образующим полную ортонормированную систему функций, то матрица P приведет к диагональному виду, если φ_i взять в качестве базисных функций, т.е. мы имеем $P_{kl} = p_k \delta_{kl}$, где $\sum_k p_k = 1$. Более того, в этом случае матрица $\ln P$, элементы которой равны логарифмам соответствующих элементов матрицы P , будет также иметь диагональный вид с диагональными элементами, равными $(\ln P)_{kk} = \ln p_k$. Таким образом, можно определить энтропию, исходя из статистической матрицы P , если положить

$$S = -kN \text{Tr}(P \ln P). \quad (51)$$

При таком определении величина S не зависит от выбора системы базисных функций (вследствие инвариантности следа) и в частном случае системы базисных функций, в которой P и $\ln P$ диагональны, имеет вид

$$S = -kN \sum_k p_k \ln p_k, \quad (52)$$

соответствующий старому определению [формула (50)].

Найдем максимум энтропии, считая фиксированными число систем N и полную энергию E . Сначала вспомним, как проводятся соответствующие классические вычисления. Отыскивается максимум P при дополнительных условиях $N = \text{const}$ и $E = \text{const}$. Таким образом, можно написать

$$\delta P = 0, \text{ причем } \delta N = 0, \delta E = 0.$$

Метод множителей Лагранжа позволяет написать соотношение

$$\delta(P - \alpha N - \beta E) = 0, \quad (53)$$

или

$$-N \sum_i \delta p_i [\ln p_i + 1 + \alpha + \beta E_i] = 0, \quad (54)$$

что должно выполняться для произвольной вариации величин p_i , так что

$$p_i = e^{-1-\alpha-\beta E_i}. \quad (55)$$

Это — классический закон Больцмана — Гиббса. Множитель $e^{-\alpha}$ вычисляется на основе соотношения $\sum_i p_i = 1$ что дает

$$p_i = \frac{e^{-\beta E_i}}{\sum_k e^{-\beta E_k}}. \quad (56)$$

Если это выражение сравнить с соответствующей формулой в теории идеального газа, то можно видеть, что $\beta = 1/kT$, где k — постоянная Больцмана и T — абсолютная температура, которая предполагается имеющей определенное значение для рассматриваемой совокупности N систем. Тогда легко найти для энтропии наиболее вероятного распределения

$$S = -kN \sum_i p_i \ln p_i = kN \left(\ln \sum_i e^{-\frac{E_i}{kT}} + \frac{1}{kT} \frac{\sum_i E_i e^{-E_i/kT}}{\sum_i e^{-E_i/kT}} \right). \quad (57)$$

Введем обозначение $Z(\beta) = \sum_k e^{-\beta E_k}$; Z — это «сумма по состояниям» Планка. Тогда имеем

$$S = kN \left(\ln Z - \beta \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right), \quad (58)$$

$$E = -N \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \quad \left(= N \sum_i p_i E_i \right), \quad (59)$$

$$F = E - TS = -kNT \ln Z \text{ и т.д.} \quad (60)$$

В квантовой термодинамике вычисления производятся по той же схеме. Нам нужно математически выразить то обстоятельство, что величина $-kN \text{Tr}(P \ln P)$ максимальна при дополнительных условиях $\text{Tr} P = 1$ и $E = N\bar{E} = N \text{Tr}(P \cdot H)$. Здесь H — матрица гамильтониана для какой-либо из систем. Таким образом, можно написать

$$\delta \sum_k P_{kk} \ln P_{kk} = 0, \quad (61)$$

где

$$\delta \sum_k P_{kk} = 0, \quad \delta \sum_{kl} P_{kl} H_{lk} = 0,$$

или после введения множителей Лагранжа α и β

$$\delta \sum_k P_{kk} \ln P_{kk} + \alpha \delta \sum_k P_{kk} + \beta \delta \sum_{kl} P_{kl} H_{lk} = 0, \quad (62)$$

т. е.

$$\sum_k \delta P_{kk} [\ln P_{kk} + 1 + \alpha + \beta H_{kk}] + \sum_{kl} \beta \delta P_{kl} H_{kl} = 0 \quad (63)$$

при всех δP_{kl} . Таким образом, необходимо, чтобы системы находились в собственных состояниях оператора энергии ($\delta P_{kl} = 0$ при $k \neq l$) и, кроме того, чтобы выполнялось соотношение

$$P_{kk} = e^{-1-\alpha-\beta H_{kk}}, \quad (64)$$

причем, поскольку $\sum_k P_{kk} = 1$,

$$e^{-1-\alpha} \sum_k e^{-\beta H_{kk}} = 1.$$

Отсюда

$$P = \frac{e^{-\beta H}}{\text{Tr} e^{-\beta H}} = \frac{e^{-\beta H}}{Z(\beta)}, \quad (65)$$

где введено обозначение

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta H}.$$

Как и в классической теории, можно показать, что $\beta = 1/kT$, и для энтропии наиболее вероятного распределения находим

$$S = \frac{kN}{Z(\beta)} \text{Tr} \left[e^{-\beta H} (\beta H + \ln Z) \right] = kN \left[\ln Z - \beta \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right]. \quad (66)$$

Кроме того,

$$E = N \text{Tr} (P \cdot H) = -N \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}, \quad (67)$$

$$F = E - TS = -kNT \ln Z \quad \text{и т. д.} \quad (68)$$

Мы приходим к тем же самым формулам, что и в классической статистической термодинамике, но с другим определением функции Z . Полученное выражение для P показывает, что вес стационарного состояния ψ_k , соответствующего энергии $E_k = H_{kk}$, в смешанном состоянии будет равен $e^{-\beta E_k} / \sum_l e^{-\beta E_l}$, а это в точности совпадает с каноническим законом Больцмана — Гиббса.

8. ОБРАТИМАЯ И НЕОБРАТИМАЯ ЭВОЛЮЦИЯ

Из сказанного ранее следует, что на микроскопическом уровне имеются два вида эволюции: обратимая между двумя измерениями и необратимая, обусловленная измерением.

Обратимая эволюция системы или совокупности систем характеризуется совершенно детерминированной эволюцией волновой функции системы или волновых функций совокупности систем. Если мы имеем дело с чистым состоянием и если $\psi_0(0)$ — начальное значение соответствующей ему волновой

функции, то последняя будет изменяться во времени в соответствии с уравнением

$$\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, \quad (69)$$

где H — оператор Гамильтона для системы, который в случае изолированной системы не зависит от времени. Таким образом, имеем

$$\psi(t) = e^{(2\pi i/\hbar)Ht} \psi(0), \quad (70)$$

где

$$e^{(2\pi i/\hbar)Ht} = \sum_n \frac{1}{n!} \left(\frac{2\pi i}{\hbar} Ht \right)^n.$$

Состояние, чистое в начальный момент, остается и далее чистым состоянием. Как нетрудно убедиться, для оператора $e^{(2\pi i/\hbar)Ht}$ сопряженным будет оператор $e^{(-2\pi i/\hbar)Ht}$, так что оператор, обратный этому оператору, равен его сопряженному. Следовательно, это унитарный оператор, сохраняющий норму функций ψ , как и должно быть. Поскольку унитарные преобразования сохраняют след матриц, энтропия S для ансамбля из N систем в состоянии ψ , равная $-kN \text{Tr}(P \ln P)$, не будет меняться с течением времени, т.е. процесс обратим.

Рассмотрим теперь некую смесь чистых состояний. Каждая из волновых функций $\psi^{(k)}(t)$ для чистых состояний в смеси изменяется в соответствии с волновым уравнением

$$\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial t} = H\psi^{(k)},$$

где H — оператор Гамильтона для рассматриваемых тождественных систем. Таким образом, эта полностью детерминированная эволюция описывается формулой

$$\psi^{(k)}(t) = e^{(2\pi i/\hbar)Ht} \psi^{(k)}(0), \quad (71)$$

т.е. унитарным преобразованием. Эволюция статистической матрицы дается формулой

$$P(t) = \sum_k p_k P_{\psi^{(k)}(t)}, \quad (72)$$

или так как

$$\psi^{(k)}(t) = \sum_l c_l^{(k)}(t) \varphi_l, \quad (73)$$

то

$$(P(t))_{lm} = \sum_k p_k c_l^{(k)}(t) c_m^{(k)*}(t). \quad (74)$$

След матрицы $P = \sum_k p_k \sum_i c_i^{(k)}(t) c_i^{(k)*}(t)$ сохраняется в результате унитарного преобразования функции $\psi(k)$, норма которой $|\psi(k)(t)|^2 = \sum_i |c_i^{(k)}(t)|^2$ не меняется. Поэтому энтропия S смеси остается неизменной. Эволюция смешанного состояния обратима.

Необратимые переходы, соответствующие недетерминированным процессам, происходят в момент взаимодействий при измерении, рассматривавшихся выше. Взаимодействие изучаемой системы (системы 1) с измерительным прибором (системой 2) соответствует детерминированной обратимой эволюции состояния полной системы 1 + 2, пока макроскопическая констатация индивидуального состояния системы 2 наблюдателем не нарушит эту эволюцию, позволив приписать системе 1 новое состояние в результате процесса, который не является ни обратимым, ни [даже] причинным [согласно принятой теперь интерпретации]¹⁾. Энтропия системы 1 в ее начальном состоянии равна

$$S = -k \operatorname{Tr} (P \ln P) = -k \sum_i p_i \ln p_i \quad (75)$$

Если начальным состоянием системы 1 является чистое состояние, то все p_i будут равны нулю, кроме одного, равного 1. В связи с этим энтропия S будет равна нулю и будет оставаться равной нулю, если система остается изолированной и эволюционирует обратимо. Если же взаимодействие с системой 2 в дальнейшем переведет систему 1 в смешанное состояние, то все p_i станут меньшими единицы, величины $\ln p_i$ станут отрицательными и энтропия станет положительной: процесс необратим, измерение приводит к возрастанию энтропии. Цепь обратимой эволюции разрывается; как мы отмечали выше, становится невозможным каким-либо путем по состоянию после измерения установить состояние до измерения.

Если начальное состояние смешанное, то можно показать, что любое измерение, существенно изменяющее это смешанное состояние, приводит к увеличению энтропии. Доказательство оказывается довольно пространственным; его можно найти в книге фон Неймана²⁾.

Итак, всякое измерение, меняющее состояние системы, приводит к возрастанию энтропии. Такой вывод представляется вполне логичным, поскольку он соответствует необратимому характеру измерения, создающего новое состояние, зная которое никоим образом невозможно установить прежнее состояние. Поскольку само представление об определенном направлении течения времени, возникающее из опыта, основывается на необратимости физических явлений и на соответствующем возрастании энтропии, то, очевидно, время в

¹⁾ Слова «даже» и «согласно принятой теперь интерпретации» добавлены автором позднее. — Ж.Л.

²⁾ (Более позднее добавление к тексту.) Объяснение возрастания энтропии (фон Нейман) утратой сведений о разностях фаз при измерении, которая соответствует уменьшению информации, т.е. нега-энтропии. — Л.Б.

Это примечание было сделано в период активных исследований Шеннона и Бриллюэна, за которыми Луи де Бройль внимательно следил. Мысль, выраженная здесь, развита затем в «Теории измерений в волновой механике» [11, 27, с. 119] — Ж.Л.

волновой механике должно играть особую роль в связи с тем значением, которое играет в ней измерение. Эта роль игнорируется в классической теории и, в частности, в теории относительности. В свете этого может стать более понятным то обстоятельство, что в волновой механике и в теории относительности время рассматривается не одинаково. В теории относительности время заставляют играть роль, симметричную роли пространственных координат, и в явном виде не учитывают того, что время течет в одном направлении, между тем как в волновой механике время рассматривается как параметр, с которым не связана никакая статистика, аналогичная статистике, связанной с пространственными координатами, так что измерение, проводимое в некоторый момент времени, играет важнейшую роль в силу необратимости времени. Мы не будем более задерживаться на этих вопросах, которые, будучи необычайно интересными, в то же время оказываются весьма тонкими [и могут выступать в разных аспектах в зависимости от эволюции представлений о причинности в волновой механике¹⁾].

Определение энтропии, в какой-то мере микроскопическое, к которому мы пришли, существенно отличается от определения, даваемого в классической термодинамике: в самом деле, возрастание энтропии оказывается связанным с процессом измерения, тогда как в классической теории энтропии измерение не играет никакой роли. Поэтому необходимо выяснить, каким образом эти два взгляда на энтропию могут быть согласованы между собой. Именно это было сделано фон Нейманом в его книге [40, с. 273], где были введены операторы, соответствующие макроскопическим наблюдаемым и коммутирующие между собой. Эта теория, которая была развита Ватанабе в его докторской диссертации (1935 г.), носит довольно деликатный характер, содержит не вполне ясные моменты и требует дополнительных исследований. Здесь я не буду далее касаться этих вопросов.

9. СТАТИСТИЧЕСКАЯ МАТРИЦА P_0

В заключение скажу несколько слов о статистической матрице P_0 , обладающей замечательными свойствами, на которые обратил внимание фон Нейман.

Мы знаем, что в классической статистической термодинамике все возможные макроскопические состояния системы рассматриваются как априори равновероятные (другими словами, они считаются равновероятными, если нет каких-либо сведений о состоянии системы, например сведений о значении полной энергии или о контакте с термостатом, поддерживающим постоянную температуру системы, и т.д.).

По аналогии с этим в волновой механике все состояния системы, определяемые различными функциями, образующими полную систему ортонормированных функций, можно априори предполагать равновероятными. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_k$, — такая система базисных функций; зная, что система характеризуется смесью состояний φ_k , в отсутствие какой-либо другой информации мож-

¹⁾Фраза в квадратных скобках была добавлена в текст позже. — Ж.Л.

но считать, что статистическая матрица системы имеет вид

$$P_0 = \sum_k p P_{\varphi_k}, \text{ где } \sum_k p = 1, \quad (76)$$

т.е. что P_0 — статистическая матрица такого смешанного состояния, для которого все веса равны между собой. Если число состояний k равно бесконечности, то возникают затруднения математического характера, поскольку p должно быть в этом случае бесконечно малым. Эти затруднения можно преодолеть, пользуясь соответствующими математическими приемами; мы их устраним, предположив, что число состояний ограничено. Принимая φ_k за базисные функции, матрицу P_0 можно представить в виде

$$(P_0)_{kl} = p \delta_{kl}. \quad (77)$$

Если некоторая функция f может быть разложена в ряд по функциям φ_k , т.е.

$$f = \sum_k c_k \varphi_k,$$

то оператор P_0 , действуя на функцию f , даст

$$P_0 f = p \sum_k P_{\varphi_k} f = p \sum_k c_k \varphi_k = p f. \quad (78)$$

Теперь мы докажем следующую теорему.

Если статистическое состояние ансамбля систем в начальный момент времени характеризуется матрицей P_0 и если во всех системах ансамбля провести измерение одной и той же величины A , то статистическое состояние ансамбля будет по-прежнему характеризоваться матрицей P_0 .

Если во всех системах мы измерим одну и ту же величину A с собственными функциями χ_1, \dots, χ_n , то мы получим новое смешанное состояние. Таким образом, будем иметь

$$\varphi_n = \sum_m d_{nm} \chi_m, \quad (79)$$

где d_{nm} — элементы унитарной матрицы, для которой

$$\sum_n d_{ln} d_{mn}^* = \sum_n d_{nl} d_{nm}^* = \delta_{lm}. \quad (80)$$

Если провести измерение величины A в системе, находящейся в состоянии φ_n , то мы получим смесь состояний χ_k с весами $|d_{nk}|^2$. В конечном смешанном состоянии, полученном после измерения величины A во всех системах, веса состояний χ_m будут равны

$$\sum_k p |d_{km}|^2 = p \sum_k d_{km} d_{km}^* = p \delta_{mm} = p.$$

Таким образом, конечная смесь состояний χ будет смесью с равными весами p , и она будет характеризоваться статистической матрицей

$$P'_0 = \sum_k p P_{\chi_k}, \quad (81)$$

что и требовалось доказать.

Глава XVI

Роль времени в волновой механике

1. ПОСТВИДЕНИЕ В ПОНИМАНИИ КОСТА ДЕ БОРГАРА [42, 43]. ВЕРОЯТНОСТЬ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЯ

Мы уже знаем, что наблюдатель, которому известен результат измерения, проведенного в некоторый момент времени, не может восстановить волновую функцию, которая описывала состояние системы до измерения для наблюдателя, располагавшего той информацией, которая имелась ранее¹⁾.

Рассмотрим простой случай определения положения частицы и допустим, что наблюдатель A , определив положение частицы в момент t_1 , нашел ее в точке M_1 . Тогда он, взяв в качестве начального значения волновой функции δ -функцию $\psi_A(M, t_1) = \delta(M - M_1)$, сможет на основании волнового уравнения вычислить волновую функцию $\psi_A(M, t)$ в последующий момент времени t и указать вероятность $|\psi_A(M, t_2)|^2$ найти частицу в какой-либо точке M в момент времени $t_2 > t_1$. Если новое измерение координат, проведенное в момент t_2 , покажет, что частица находится в точке M_2 , то наблюдатель B , который знает лишь о локализации в точке M_2 , но не знает о локализации в точке M_1 , никак не сможет восстановить вид функции $\psi_A(M, t)$, которую взял наблюдатель A , знавший о локализации в точке M_1 . Зная ψ_A , наблюдатель B мог бы, мысленно изменив направление течения времени, определить, что в момент t_1 частица была локализована в точке M_1 , но он не знает ψ_A . Даже если бы некий *статистический* эксперимент дал ему амплитуды $|\psi_A(M, t_2)|$ во всех точках M пространства, он, не зная фаз волн, все-таки не смог бы восстановить обратную эволюцию волновой функции ψ_A .

К такому выводу мы пришли бы, если бы измеряли импульс, т.е. если бы определяли положение в пространстве импульсов.

Тем не менее операция мысленного прослеживания за эволюцией функции ψ от своей начальной формы

$$\psi_B(M, t_2) = \delta(M - M_2)$$

в обратном направлении течения времени имеет определенный смысл; на это

¹⁾Мы опустили четыре страницы, повторяющие начало главы «Некоторые трудные вопросы волновой механики» (в первой части книги), в связи с чем были вынуждены несколько изменить первую фразу. — *Прим. редакторов франц. издания.*

несколько лет назад указали В. А. Фок и Коста де Боргар, которые подчеркивали важность этой операции и ввели термин «поствидение». В самом деле, если наблюдатель B , который знает лишь о локализации частицы в точке M_2 в момент t_2 , не может установить *достоверно* факт локализации в точке M_1 в момент t_1 и найти форму функции $\psi_A(M, t)$, то он все-таки может найти относительные вероятности различных положений частицы в момент t_1 , исходя из известного ему факта локализации частицы в точке M_2 в момент t_2 . Другими словами, наблюдатель B сможет решить задачу о «вероятности причин», которая формулируется следующим образом: какова вероятность того, что *причиной* локализации частицы в точке M_2 в момент t_2 была локализация частицы в точке M_1 в момент t_1 ? Здесь четко видно, что, хотя в волновой механике нет строго детерминированной связи между причиной и следствием, в ней все-таки существует стохастическая связь между причиной и следствием как в направлении от прошедшего к будущему, так и в направлении от будущего к прошедшему¹⁾.

Для такого поствидения наблюдатель B должен использовать волновую функцию $\psi_B(M, t)$, которую он получил, взяв начальное выражение

$$\psi_B(M, t_2) = \delta(M - M_2)$$

для волнового уравнения и *обратив* в последнем ход времени. Тогда для волновой функции $\psi_B(M, t)$ он найдет выражение $\psi_B(M, t_1)$ в прошедший момент $t_1 < t_2$ и величина $|\psi_B(M, t_1)|^2$ даст ему вероятность того, что частица была локализована в точке M в момент t_1 . Это — вероятность для наблюдателя B , который знает о локализации в точке M_2 в момент t_2 , но не знает о локализации в точке M_1 в момент t_1 .

Для такого «поствидения», очевидно, необходимо, чтобы квадрат модуля $|\psi_B(M_1, t_1)|^2$ был отличен от нуля, так как иначе будет равна нулю вероятность произошедшего события! Более тщательный анализ показывает, что требуется даже большее: вероятность $|\psi_A(M_2, t_2)|^2$ того, что частица будет локализована в точке M_2 в момент t_2 , если известно, что она была локализована в точке M_1 в момент t_1 , должна быть равна вероятности того, что частица *была* локализована в точке M_1 в момент t_1 , если известно, что она локализована в точке M_2 в момент t_2 . В математической форме это условие записывается при указанных выше определениях ψ_A и ψ_B следующим образом:

$$|\psi_A(M_2, t_2)|^2 = |\psi_B(M_1, t_1)|^2. \quad (12)$$

Данное свойство симметрии между ψ_A и ψ_B прямо связано с классическим свойством симметрии функций Грина, что можно увидеть, выразив решения

¹⁾В настоящее время автор сказал бы точнее: нет строго детерминированной связи между причиной и следствием, *доступной наблюдению*, но это не исключает возможности существования *скрытой* детерминированной связи, не обнаруживаемой в тех опытах, которые мы умеем сегодня проводить. — Ж.Л.

ψ_A и ψ_B волнового уравнения через симметричное ядро $K(M', t'; M, t)$ ¹⁾:

$$\psi_A(M_2, t_2) = \int K(M_2, t_2; M_1, t_1) \delta(M - M_1) dM = K(M_2, t_2; M_1, t_1), \quad (13)$$

$$\psi_B(M_1, t_1) = \int K(M_1, t_1; M_2, t_2)^* \delta(M - M_2) dM = K^*(M_1, t_1; M_2, t_2),$$

причем $K(M_2, t_2; M_1, t_1) = K(M_1, t_1; M_2, t_2)$, откуда следует равенство (12).

¹⁾Введем ядро $K(M, t; P, \tau)$, зависящее от двух точек пространства времени (M, t) и (P, τ) , и положим

$$\psi_A(M, t) = \int K(M, t; P, \tau) \delta(P - M_1) \delta(\tau - t_1) dP d\tau = K(M, t; M_1, t_1). \quad (1)$$

Следовательно,

$$\psi_A(M_2, t_2) = K(M_2, t_2; M_1, t_1). \quad (2)$$

Подставив ядро K в волновое уравнение для ψ_A , найдем

$$\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} K(M, t; P, \tau) = H_M K(M, t; P, \tau) \quad (3)$$

и, следовательно,

$$-\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} K^*(M, t; P, \tau) = H_M K^*(M, t; P, \tau) \quad (4)$$

с начальным условием $\psi_A(M, t_1) = \delta(M - M_1)$, которое будет выполняться, если

$$[K(M, t; P, \tau)]_{t=\tau} = \delta(M - P) = [K^*(M, t; P, \tau)]_{t=\tau}, \quad (5)$$

чем и доказано, что K и K^* симметричны.

Точно так же в случае поствидения введем ядро $K_1(M, t; P, \tau)$, такое, что

$$\psi_B(M, t) = \int K_1(M, t; P, \tau) \delta(P - M_2) \delta(\tau - t_2) dP d\tau = K_1(M, t; M_2, t_2), \quad (6)$$

откуда

$$\psi_B(M_1, t_1) = K_1(M_1, t_1; M_2, t_2). \quad (7)$$

Поскольку мы рассматриваем эволюцию волновой функции ψ_B в обращенном времени, напишем уравнение

$$-\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} K_1(M, t; P, \tau) = H_M K_1(M, t; P, \tau) \quad (8)$$

с начальным условием $\psi_B(M, t_2) = \delta(M - M_2)$, которое будет удовлетворяться, если

$$[K_1(M, t; P, \tau)]_{t=\tau} = \delta(M - P), \quad (9)$$

чем и доказывается симметричность ядра K_1 .

Формулы (4), (5), (8) и (9) показывают, что функции $K^*(M, t; P, \tau)$ и $K_1(M, t; P, \tau)$ удовлетворяют одному и тому же уравнению в частных производных с одним и тем же начальным условием. Следовательно,

$$K_1(M, t; P, \tau) = K^*(M, t; P, \tau). \quad (10)$$

Отсюда с учетом симметрии ядер K и K_1 получаем

$$\begin{aligned} |\psi_A(M_2, t_2)|^2 &= |K(M_2, t_2; M_1, t_1)|^2 = |K_1(M_2, t_2; M_1, t_1)|^2 = \\ &= |K_1(M_1, t_1; M_2, t_2)|^2 = |\psi_B(M_1, t_1)|^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Что и требовалось доказать. — Л.Б.

Нетрудно установить физический смысл соотношения симметрии (12). Рассмотрим какой-либо оптический прибор, позволяющий наблюдать интерференцию или дифракцию. Поместим в точку M_1 перед входом в прибор источник света с интенсивностью, равной единице. В точке M_2 на выходе из прибора будем иметь интенсивность света i . Если затем единичный источник света

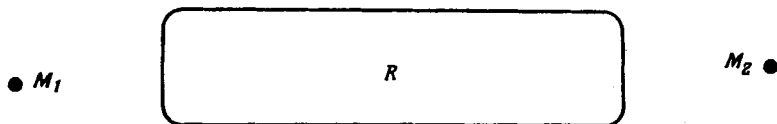


Рис. 17

поместить в точку M_2 , а не в точку M_1 , то в точке M_1 также будет наблюдаться интенсивность света, равная i . Это можно доказать, исходя из уравнения, описывающего распространение света. Но данный вывод представляется естественным и с термодинамической точки зрения: если предположить, что весь прибор находится в термостате с температурой T , а в точках M_1 и M_2 находятся два малых абсолютно черных точечных тела, которые испускают тепловое излучение, то каждое из этих тел должно будет посылать другому столько же энергии, сколько оно получает, так как иначе равенство температур двух абсолютно черных тел спонтанно нарушилось бы, что невозможно.

Итак, наблюдатель B может, зная о локализации частицы в точке M_2 в момент t_2 , при помощи волновой функции ψ_B найти вероятность локализации ее в прошлом в точке M_1 в момент t_1 . Подчеркнем еще раз, что здесь речь идет о задаче, аналогичной классической задаче теории вероятностей о вероятности причин, и что здесь мы имеем дело со стохастической взаимосвязью между причиной и следствием.

Полученные выше результаты легко вывести, применив формулу Байеса, дающую вероятность причин. Согласно этой формуле, вероятность того, что причиной констатированного события k было событие i , равна

$$i^{(k)} = \frac{\omega_i p_{ik}}{\sum_j \omega_j p_{jk}}, \quad (14)$$

где ω_j — априорная вероятность причины j , а p_{jk} — вероятность того, что причина j вызовет следствие k . Согласно этой формуле, вероятность того, что частица была локализована в точке M_1 в момент t_1 ; если известно, что она была локализована в точке M_2 в момент $t_2 > t_1$, дается выражением

$$P_{M_1, t_1}^{(M_2, t_2)} = \frac{\omega(M_1, t_1) |K(M_1, t_1; M_2, t_2)|^2}{\int \omega(M_1, t_1) |K(M_1, t_1; M_2, t_2)|^2 dM_1}. \quad (15)$$

Естественно принять, что все положения M_1 априори равновероятны, так что $\omega(M_1, t_1) = A$ для всех M_1 . Более того,

$$|K(M_1, t_1; M_2, t_2)|^2 = |\psi_A(M_2, t_2)|^2 = |\psi_B(M_1, t_1)|^2, \quad (16)$$

и поскольку функции ψ нормированы, то

$$P_{M_1, t_1}^{(M_2, t_2)} = |K(M_1, t_1; M_2, t_2)|^2 = |\psi_B(M_1, t_1)|^2, \quad (17)$$

что и требовалось доказать.

Сделаем следующее замечание. В некотором смысле можно сказать, что «истинной» волновой функцией в промежутке времени (t_2, t_1) является функция ψ_A , поскольку она содержит сведения, которые мог бы иметь наблюдатель B , если бы его информация была полной. Момент t_1 был раньше момента t_2 , и наблюдатель B мог бы знать в момент t_2 форму волновой функции ψ_A . Но так как по предположению он знает лишь о локализации частицы в точке M_2 в момент t_2 , у него нет полной информации. Неполнота информации вынуждает его пользоваться «неполной» функцией ψ_B при анализе обращенной эволюции, а это будет давать ему лишь вероятности, а не достоверные сведения о локализации частицы в момент t_1 .

Очевидно, что весь этот вопрос можно было бы рассмотреть с точки зрения теории информации, но, естественно, с учетом специфики квантовой механики (интерференция вероятностей и существенная роль фаз). При строгом подходе следовало бы также учитывать релятивистские представления и принимать во внимание то обстоятельство, что скорость распространения сигналов не может превышать величины c . Если первая локализация есть событие M_1, t_1 в эйнштейновском пространстве-времени, то вторая — это точка-событие M_2, t_2 , которое обязательно должно находиться на световом конусе «будущего» по отношению к событию M_1, t_1 . Следовательно, наблюдатель B , который констатирует локализацию в точке M_2 в момент времени t_2 , в принципе мог бы знать (например, по световому сигналу) о локализации частицы в точке M_1 в момент времени t_1 ; если же он этого не знает, то он не имеет полной информации. Такие рассуждения показывают, в частности, что симметрия между прошедшим и будущим в соотношении (12) — лишь кажущаяся и что факт существования в сознании всех людей одного направления течения времени исключить невозможно. К этому вопросу мы вернемся ниже.

2. ОСОБАЯ РОЛЬ ВРЕМЕНИ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ. ЧЕТВЕРТОЕ СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Если формально исходить из общих представлений теории относительности, то четвертое соотношение неопределенностей $\delta W \cdot \delta t \sim h$ выступает как естественное дополнение к трем первым соотношениям $\delta p_i \cdot \delta x_i \sim h$, поскольку в теории относительности энергия рассматривается как величина, канонически сопряженная со временем, аналогично тому, как составляющие p_x, p_y, p_z импульса канонически сопряжены с переменными x, y, z . Это явствует, например, из того, что подинтегральное выражение действия в гамильтоновой теории, имеющее вид $W dt - p_x dx - p_y dy - p_z dz$, является пространственно-временным инвариантом.

Но в квантовой механике четвертое соотношение неопределенностей в действительности не является симметричным по отношению к трем первым. В самом деле, волновая механика, даже будучи записанной в релятивистской

форме, приданной ей Дираком, не устанавливает истинной симметрии между пространственными переменными и переменной времени¹⁾. Координаты x , y , z частицы являются «наблюдаемыми» величинами с соответствующими операторами: их значения в каждом чистом состоянии, характеризуемом определенной волновой функцией ψ , имеют некое распределение вероятностей. В противоположность этому время t всегда рассматривается как параметр, имеющий определенное значение.

Это можно пояснить еще следующим образом. Допустим, что некий галилеев наблюдатель проводит измерение. Он использует координаты x , y , z , t , которые дают ему возможность характеризовать событие в рамках макроскопического опыта. Переменные x , y , z , t — это числа, параметры, и эти числа входят в волновое уравнение и в волновую функцию. Но каждой частице в атомной физике соответствуют «наблюдаемые величины», каковыми являются координаты частицы. Соответствие между наблюдаемыми величинами x , y , z и характеристиками пространства x , y , z галилеева наблюдателя носит стохастический характер; каждая наблюдаемая величина x , y , z в общем случае может в этой связи иметь целый ряд значений с определенным распределением вероятностей. В противоположность этому в современной квантовой механике отсутствует «наблюдаемая величина t », связанная с частицей: имеется лишь переменная t , являющаяся одной из переменных пространственно-временного описания для наблюдателя, определяемая часами (принципиально макроскопическими), которыми пользуется этот наблюдатель²⁾.

¹⁾ Данный вопрос исследовался автором в монографии «Магнитный электрон» [II, 11]. — Ж.Л.

²⁾ (Примечание, сделанное позднее карандашом.) — Волна-пилот. Координаты частиц существуют в любой момент времени, но измерение может устанавливать лишь стохастическую связь между этими координатами и характеристиками пространства-времени. — Л.Б.

(Примечание, сделанное на отдельном листке и, по-видимому, позднее предыдущего примечания.) В теории волны-пилота необходимо различать точку зрения супернаблюдателя и точку зрения реального наблюдателя. Для супернаблюдателя частицы имеют определенное положение и определенные траектории и их движение происходит в пространстве-времени с симметрией между пространством и временем и с обратимостью времени. Но для реального наблюдателя, который может узнавать о положении и скорости лишь путем измерений, проводимых в некий момент своего времени и подчиняющихся соотношениям неопределенностей, время, которое является «временем наблюдателя» и указывается его часами, играет не такую роль, как пространственные координаты. И для такого наблюдателя время необратимо, поскольку события, которые он воспринимает, развертываются только в одном направлении и поскольку, обладая памятью, он может знать прошлое, но не может знать будущего. — Л.Б.

Интересно отметить, что в этом примечании, где де Бройль делает еще один шаг к своим первоначальным представлениям, он еще остается под влиянием концепций копенгагенской школы и связывает необратимость времени с сознанием и с памятью наблюдателя. Вместе с тем мы знаем, что позднее он стал связывать необратимость процессов измерения с «сортировкой» частицы, которая при выходе из спектрального анализатора «сцепляется» с одним из отдельных волновых пакетов, возникших из начальной волны [II, 27, с. 119]. Отметим также, что в итоге своих исследований по термодинамике он позднее пришел к представлению ρ времени, абсолютно необратимом даже в

В волновой механике необходима «эволюционная переменная», которая давала бы возможность следить за изменением состояния квантовых систем. Но такая эволюция состояния квантовых систем или, точнее говоря, эволюция наших знаний об этом состоянии с необходимостью происходит в том времени, которое имеется в сознании наблюдателя, во времени, течение которого мы можем отмечать лишь по микроскопическим часам. Именно в рамках этого сознаваемого времени присходят резкие изменения вида функции ψ , связанные с нашими операциями измерения и с теми сведениями, которые нам дают измерения. Но то обстоятельство, что мы обязаны брать в качестве переменной макроскопическое время, т.е. переменную релятивистского пространства-времени, не позволяет нам приписать частицам или квантовым системам случайную переменную — «наблюдаемую» t , как мы ставим в соответствие пространственным координатам наблюдаемые q с неким распределением вероятностей.

Таковы некоторые глубокие причины, по которым невозможно [по крайней мере с точки зрения реального наблюдателя] установить в волновой механике симметрию между пространством и временем, аналогичную той, которая постулируется в теории относительности [если принять существующую теорию]¹⁾. Эти трудности тесно связаны с тем, что в квантовой физике устанавливается соотношение нового рода между объективным и субъективным. Состояние квантовой системы в новой теории уже не носит объективного характера, который соответствует описанию «того, что есть»; напротив, оно определяется только в зависимости от того, «что мы знаем», это представление наших знаний, и мы не можем выйти за пределы такого представления. «Состояние», характеризуемое волновой функцией ψ , эволюционирует в сознании наблюдателя, а следовательно, и в макроскопическом времени; если квантовым теориям не удастся установить истинную симметрию между пространством и временем, то это, по-видимому, обусловлено особым характером времени, воспринимаемого сознанием, непрерывностью и необратимостью его течения.

Впрочем, отметим, что и в самой теории относительности нет полной симметрии между пространством и временем, во-первых, поскольку время необратимо, а во-вторых, поскольку координатам x , y , z симметрична не величина t , а величина $\sqrt{-1}t$ (ибо время и пространственные координаты входят с разными знаками в даламбертиан). Но в квантовых теориях нарушение симметрии становится гораздо более глубоким.

микроскопических масштабах, независимо от каких-либо наблюдений. Это привело его к выводу о том, что понятие пространства-времени, ценность которого в теории относительности он несомненно признает, тем не менее в какой-то мере является ложным, поскольку оно устанавливает симметрию между пространством и временем, тогда как необратимость течения, свойственная времени, не имеет места для пространственных координат [V, 65, с. 116]. — Ж.Л.

¹⁾Слова, помещенные в квадратные скобки, вписаны позже разными чернилами. — Ж.Л.

3. ПРАВИЛЬНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЧЕТВЕРТОГО СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Рассмотрим случай, когда у нас имеется волновой пакет ψ , занимающий ограниченную область R пространства. Координата x частицы является неопределенной: в результате измерения мы можем установить, что она может соответствовать любой точке M внутри области R с вероятностью $|\psi(M)|^2$. С другой стороны, вероятность получить для p_x заданное значение равна $|\rho_x|^2$, так что величина p_x тоже неопределенная. Мы знаем, что произведение неопределенностей $\delta x \cdot \delta p_x$ по порядку величины равно h . Но если можно измерять координату x частицы, то нельзя говорить об измерении ее времени t , поскольку в волновой механике время t — это макроскопическое время наблюдателя, которое всегда имеет определенное значение.

Что же тогда означает четвертое соотношение неопределенностей $\delta E \cdot \delta t \geq h$? Оно означает, что для того чтобы иметь возможность приписать частице энергию E с неопределенностью δE , необходимо проводить наблюдение, т.е. операцию измерения в течение по меньшей мере времени $\delta t = h/\delta E$. В самом деле, анализ представления волнового пакета в виде интеграла Фурье показывает, что продолжительность δt прохождения волнового пакета через точку P по порядку величины не меньше $\delta t = 1/\delta \nu$, где $\delta \nu$ — эффективный интервал частот в разложении Фурье. Чтобы установить, что неопределенность энергии не превышает $\delta E = h \delta \nu$, нужно наблюдать в точке P прохождение переднего и заднего фронтов волнового пакета, а это требует времени наблюдения, равного по меньшей мере $\delta t \sim h/\delta E$. Так, например, чтобы можно было утверждать, что $\delta E = 0$, т.е. что волновой пакет монохроматический, строго говоря, нужно было бы проводить наблюдение бесконечно долго.

Таким образом, три первых соотношения выражают существование распределения вероятностей для сопряженных величин q и p , т.е. то обстоятельство, что эти величины — «случайные переменные» в смысле теории вероятностей, а четвертое соотношение неопределенностей следует интерпретировать иначе: время t не является случайной переменной, но измерение энергии E возможно лишь путем наблюдения конечной длительности, и чем меньше время наблюдения, тем больше неопределенность в значении E . Поскольку время t не является случайной переменной, здесь уже не может быть точных соотношений между дисперсиями, подобных соотношению $\sigma_x \cdot \sigma_{p_x} \geq h/4\pi$ для переменных x и p_x . Другими словами, для качественного соотношения неопределенностей $\delta E \cdot \delta t \geq h$ нет дисперсионного аналога вида $\sigma_E \cdot \sigma_t \geq h/4\pi$, поскольку $\sigma_t = 0$. Нетрудно видеть противоречие между сделанными выводами и релятивистской симметрией пространства и времени.

4. ЧЕТВЕРТОЕ СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ И ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Пусть система имеет среди своих квантовых состояний два состояния E_i и E_k . Эта система возмущается внешним воздействием, и вычисления (какие, мы уточним позднее) показывают, что под действием возмущения она колеблется

между состояниями E_i и E_k с частотой $\nu_{ik} = (E_i - E_k)/h$. Не следует делать вывода, что система в физическом смысле переходит из состояния i в состояние k и наоборот; мы имели бы право сказать это только в том случае, если бы могли зарегистрировать систему в одном и в другом из этих состояний, т.е. измерить энергию системы. Но поскольку она остается в одном из состояний лишь в течение времени δt , меньшего чем $1/\nu_{ik} = h/(E_i - E_k)$, путем измерения мы можем установить энергию одного или другого из этих состояний лишь с неопределенностью, превышающей $\delta E \sim h/\delta t \sim E_i - E_k$, а потому не можем различить эти два близких состояния. Во время взаимодействия энергия системы остается неопределенной, лежащей между E_i и E_k , и мы можем проверить выполнение закона сохранения энергии лишь с неопределенностью, превышающей $|E_i - E_k|$.

Предположим теперь, что энергия системы равна E_1 до момента времени t_1 , затем она подвергается внешнему возмущающему воздействию с момента t_1 до момента t_2 , после чего остается в состоянии E_2 при $t > t_2$. Поскольку в нашем распоряжении для измерения E_1 и E_2 имеются все моменты времени, которые предшествуют t_1 и которые следуют за t_2 , мы можем очень точно знать E_1 и E_2 и закон сохранения энергии требует, чтобы выполнялось равенство $E_1 = E_2$. Но в течение промежутка времени $t_2 - t_1$, когда действует возмущение, система может перейти в промежуточное состояние с энергией E . Если время $t_2 - t_1$ мало по сравнению с $h/(E_2 - E_1)$, то невозможно обнаружить систему в этом состоянии, измеряя его энергию. Можно сказать, что система проходит через «виртуальное» состояние E и в действительности во время всего взаимодействия неопределенность энергии остается равной $E_2 - E_1$. Закон сохранения энергии выполняется для глобального перехода $E_1 \rightarrow E_2$, но он не обязан выполняться для виртуальных переходов $E_1 \rightarrow E$ и $E \rightarrow E_2$.

Все сказанное можно обосновать более строго так называемым методом «вариации постоянных», предложенным Дираком. В этом методе предполагается, что рассматриваемая система до начала действия возмущения обладает невозмущенным гамильтонианом $H^{(0)}$, не зависящим от времени, которому соответствуют стационарные состояния системы: предполагаются известными собственные значения и собственные функции $E_k^{(0)}$ и $\psi_k^{(0)}$ этого гамильтониана. В течение ограниченного промежутка времени $0 \rightarrow T$ система подвергается действию возмущения, которое может зависеть от времени; это возмущение характеризуется в гамильтониане H членом V , так что $H = H^{(0)} + V(t)$ и уравнение эволюции системы при наличии возмущения будет иметь вид

$$[H^{(0)} + V(t)]\psi = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (18)$$

В любой момент времени t волновая функция ψ системы может быть разложена по полной системе собственных функций $\psi_k^{(0)}$ невозмущенного гамильтониана и представлена в виде

$$\psi(t) = \sum_k c_k(t) \psi_k^{(0)} \exp \left[(2\pi i / h) E_k^{(0)} t \right], \quad (19)$$

где всегда $\sum_k |c_k(t)|^2 = 1$, поскольку функция ψ нормирована.

Согласно общим принципам волновой механики, вероятность того, что в момент t система будет находиться в состоянии $\psi_k^{(0)}$, равна $|c_k(t)|^2$. Дополнительно необходимо, как мы отмечали выше, чтобы система оставалась в этом состоянии в течение времени, достаточно длительного для того, чтобы можно было определить ее энергию.

Подставив выражение для ψ в уравнение эволюции, легко найдем для величин c_k уравнение

$$\frac{dc_i}{dt} = \frac{2\pi i}{h} \sum_k V_{ik}(t) c_k(t) \exp [(2\pi i/h)(E_k^{(0)} - E_i^{(0)})t], \quad (20)$$

где

$$V_{ik}(t) = \int_D \psi_i^{(0)*} V(t) \psi_k^{(0)} dt.$$

При $V=0$ величины c_i будут постоянными, а ψ будет суммой собственных функций оператора $H^{(0)}$ с постоянными коэффициентами. Если возмущение V не равно нулю, то коэффициенты c_i зависят от времени: этим и объясняется название «метод вариации постоянных» данного способа вычислений. (Легко убедиться, что

$$\frac{d}{dt} \sum_k c_k c_k^* = 0, \text{ откуда } \sum_k |c_k|^2 = \text{const} = 1$$

в любой момент времени.)

Интегрирование выражения для dc_i/dt , вообще говоря, трудная задача, но в простом случае, когда известно, что в момент включения взаимодействия ($t=0$) система находится в состоянии с энергией $E_n^{(0)}$ и, следовательно, необходимо положить $c_n(0) = 1$ и $c_m(0) = 0$ при $m \neq n$, приближенное интегрирование дает

$$c_m(t) = V_{mn} \frac{\exp [(2\pi i/h)(E_n^{(0)} - E_m^{(0)})t] - 1}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}, \quad (21)$$

откуда

$$\begin{aligned} |c_m(t)|^2 &= \frac{2|V_{mn}|^2}{(E_n - E_m)^2} \left[1 - \cos^2 \frac{\pi}{h} (E_n - E_m)t \right] = \\ &= \frac{4|V_{mn}|^2}{(E_n - E_m)^2} \sin^2 \frac{\pi}{h} (E_n - E_m)t. \quad (22) \end{aligned}$$

Эту величину можно рассматривать как вероятность того, что система будет в момент времени t в состоянии m ; она пропорциональна $|V_{mn}|^2$, что придает особую важность матричным элементам V_{mn} . Но, согласно сказанному выше, за время, в течение которого действует возмущение, мы не можем физически обнаружить систему в состоянии с энергией E_m , поскольку для этого нужно было бы измерить энергию с неопределенностью, не превышающей $E_m - E_n$, тогда как время, в течение которого система остается в состоянии E_m ,

меньше $h/(E_m - E_n)$. И лишь после того, как действие возмущения $V(t)$ прекратится в момент $T(V(t)=0 \text{ при } t > T)$, мы сможем обнаружить систему в состоянии E_m (которое станет стационарным конечным состоянием), причем вероятность обнаружить ее в этом состоянии равна $|c_m(T)|^2$. Поскольку в период действия возмущения энергия системы не может быть измерена, к ней неприменим закон сохранения, который вступает в силу лишь по окончании действия возмущения.

Сделанные выводы подтверждаются при более глубоком анализе теории возмущений, который в частности, приводит к понятию вероятности перехода в единицу времени. Читая, интересующегося этими вопросами, мы отсылаем к первой части данной книги.

5. ОПЕРАТОРЫ H И $(h/2\pi i)(\partial/\partial t)$

Поскольку время играет в волновой механике особую роль, сопряженная с ним величина — энергия тоже должна чем-то выделяться. И действительно, так как величине p_x ставится в соответствие оператор $-(h/2\pi i)(\partial/\partial x)$, с релятивистской точки зрения было бы естественно поставить в соответствие энергии оператор $(h/2\pi i)(\partial/\partial t)$. Но, как мы знаем, энергии ставят в соответствие оператор Гамильтона H , в который входят частные производные по x , y , z . Дуальность этих двух операторов, а также та особая роль, которую в волновой механике играет величина, сопряженная времени, хорошо видны из волнового уравнения, записанного в виде $(h/2\pi i)(\partial\psi/\partial t) = H\psi$.

То, что в качестве оператора энергии следует рассматривать гамильтониан H , явствует из того, что собственные значения энергии квантованной системы определяются уравнением $H\psi = E\psi$ с соответствующими граничными условиями для пространственных переменных. Уравнение же $(h/2\pi i)(\partial\psi/\partial t) = E\psi$, решение которого имеет вид $\psi = a \exp[(2\pi i/h)Et]$, непригодно для квантования: для него невозможно задать граничные условия, соответствующие бесконечному времени, да такие условия и не могли бы дать собственные значения, соответствующие опыту. Это ясно показывает необходимость несимметричного рассмотрения в волновой механике пространственных координат и времени.

Отметим еще одно важное обстоятельство. Принцип спектрального разложения говорит нам, что если α_k и φ_k — собственные значения и собственные функции некоего оператора A волновой механики, т.е. если мы имеем разложение $\psi = \sum_k c_k(t) \varphi_k$, то вероятность того, что измерение в момент t даст для величины A значение α_k , равна $|c_k(t)|^2$. В приложении к энергии, характеризующей гамильтонианом H с собственными значениями E_k и собственными функциями ψ_k , это означает, что если волновая функция допускает разложение $\psi = \sum_k c_k(t) \psi_k$, то вероятность того, что измерение, проведенное в момент времени t , даст для энергии системы значение E_k , равна $|c_k(t)|^2$. Но здесь имеется одно важное условие: сказанное верно лишь в том случае, если величина $c_k(t)$ достаточно медленно изменяется с течением времени, так что можно провести точное измерение энергии в согласии с четвертым соотношением неопределенностей. Если это условие не выполняется (выше мы приводили та-

кой пример), то, очевидно, указанное утверждение теряет физический смысл. Данное условие, которого нет в случае величин, отличных от энергии, указывает на особую роль энергии как величины, канонически сопряженной времени, связанную с тем обстоятельством, что время в волновой механике выступает не как случайная переменная, а как числовой параметр, характеризующий эволюцию системы.

6. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ К ОПЕРАТОРАМ, ДЕЙСТВУЮЩИМ НА ВРЕМЯ

В своих попытках (по нашему мнению, безнадежных) установить симметрию между пространственными и временными переменными Коста де Боргар высказал интересную мысль о том, что можно было бы применить метод характеристической функции Арнуса к операторам, действующим на время.

Прежде всего напомним суть метода Арнуса. В качестве основного постулата Арнус принимает, что для распределения вероятностей, соответствующего величине, которой соответствует оператор A , существует характеристическая функция

$$F_A(s) = \int_D \psi^* e^{isA} \psi d\tau. \quad (23)$$

Исходя из определения характеристической функции $F_A(s)$ как математического ожидания величины $\exp(isA)$,

$$e^{isA} = \int_{-\infty}^{\infty} P(\alpha') e^{is\alpha'} d\alpha',$$

можно путем обратного преобразования Фурье получить

$$P(\alpha', t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_A(s) e^{-is\alpha'} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-is\alpha'} \int_D \psi^* e^{isA} \psi d\tau, \quad (24)$$

где α и φ — собственные значения и собственные функции оператора A , в связи с чем

$$\psi = \int_{-\infty}^{\infty} c(\alpha, t) \varphi(\alpha, \mathbf{r}) d\alpha, \quad e^{isA} \psi = \int_{-\infty}^{\infty} c(\alpha, t) e^{is\alpha} \varphi(\alpha, \mathbf{r}) d\alpha, \quad (25)$$

откуда

$$\begin{aligned} P(\alpha', t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-is\alpha'} \int_D d\tau \int_{-\infty}^{\infty} c^*(\beta, t) \varphi^*(\beta, \mathbf{r}) d\beta \int_{-\infty}^{\infty} c(\alpha, t) e^{is\alpha} \varphi(\alpha, \mathbf{r}) d\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-is\alpha'} \int_{-\infty}^{\infty} c^*(\beta, t) d\beta \int_{-\infty}^{\infty} c(\alpha, t) e^{is\alpha} d\alpha \int_D \underbrace{\varphi^*(\beta, \mathbf{r}) \varphi(\alpha, \mathbf{r})}_{\delta(\beta-\alpha)} d\tau = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-is\alpha'} \int_{-\infty}^{\infty} |c(\alpha, t)|^2 e^{is\alpha} d\alpha = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} |c(\alpha, t)|^2 d\alpha \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{is(\alpha - \alpha')} = \int_{-\infty}^{\infty} |c(\alpha, t)|^2 \delta(\alpha - \alpha') d\alpha. \quad (26)
 \end{aligned}$$

Поэтому окончательно

$$P(\alpha', t) = |c(\alpha', t)|^2, \quad (27)$$

что и нужно было показать.

Таким методом легко пользоваться в случае, когда оператор A действует только на пространственные переменные, а время t играет роль лишь числового параметра. Коста де Боргар предложил обобщение на случай операторов, действующих на время.

Рассмотрим оператор энергии в случае, когда на квантовую систему действует внешнее возмущение в течение ограниченного промежутка времени $0 - T$. Если в период действия возмущения волновая функция системы допускает разложение вида $\psi = \int c(E, t) \psi_E^{(0)}(\mathbf{r}) dE$, где $\psi^{(0)}$ — собственная функция гамильтониана $H^{(0)}$ невозмущенной системы, то метод Арнуса позволяет нам считать, что вероятность нахождения системы в момент t в состоянии с энергией E равна $|c(E, t)|^2$. Но мы видели, что в силу четвертого соотношения неопределенностей данное утверждение, вообще говоря, не имеет физического смысла, так как путем измерения систему невозможно обнаружить в состоянии с энергией E . Можно лишь утверждать, что по окончании действия возмущения ($t \geq T$), когда коэффициенты $c(E, t)$ примут *постоянные* конечные значения $c(E, t)$, вероятность найти систему в состоянии с энергией E будет равна $|c(E, T)|^2$.

Это находится в полном соответствии с тем, что мы рассмотрели выше. Попытаемся теперь вместе с Коста де Боргаром применить метод Арнуса к оператору $A = (\hbar/2\pi i)(\partial/\partial t)$, допуская, что соответствующая вероятность дается выражением

$$P(E, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-isE} \int_D \psi^* e^{\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t}} \psi d\tau, \quad (28)$$

как это должно было бы быть, если бы в определение характеристической функции имело смысл вводить оператор $A = (\hbar/2\pi i)(\partial/\partial t)$. Поскольку при $t \geq T$, т.е. после прекращения действия возмущения, выполняется равенство

$$\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = H^{(0)} \psi,$$

мы имеем также

$$\exp[(2\pi i/\hbar)(\partial/\partial t)]\psi = \exp[(2\pi i/\hbar)H^{(0)}]\psi.$$

Тогда мы видим, что при $t \geq T$ вероятность $P(E, t)$ принимает постоянное зна-

чение $P(E, T) = |c(E, T)|^2$, т.е. значение, найденное выше, и в области реально наблюдаемого замена оператора H оператором $(h/2\pi i)(\partial/\partial t)$ ничего не меняет.

Применим теперь метод Арнуса к оператору $A = t \times$, который должен был бы соответствовать времени, если бы время, так же как координаты x, y, z , было случайной переменной. Получим

$$P(t'; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-ist'} \int_D \psi^* e^{ist} \psi d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{is(t-t')} = \delta(t-t'). \quad (29)$$

Этот результат означает, что в момент t , указываемый нашими часами, случайная переменная времени, приписанная нами системе (или частице), должна принимать значение $t' = t$. Стало быть, эта переменная времени, имеющая совершенно определенное значение, в действительности не есть случайная величина, и мы снова приходим к выводу, что в волновой механике *не существует статистического распределения для времени.*

Таким образом, метод характеристической функции Арнуса в применении к операторам, действующим на время, не устраняет глубокого различия, существующего в волновой механике между временем и энергией, с одной стороны, и пространственными координатами и сопряженными им импульсами — с другой.

7. МНОВОВРЕМЕННАЯ ТЕОРИЯ. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Для доказательства ковариантности уравнений, применяемых в различных формулировках волновой механики, Дирак, Фок и Подольский предложили так называемую мнововременную теорию. Пусть имеется система частиц 1, 2, ..., k , ..., N . Определение положения k -й частицы в пространстве-времени — это «событие», характеризуемое четырьмя координатами x_k, y_k, z_k, t_k , т.е. заставляющее приписать время t_k каждой частице. Записав уравнения с такими индивидуальными временами, легко можно убедиться в их релятивистской ковариантности. Но если мы хотим делать предсказания относительно результатов наблюдений и измерений, то мы должны будем приравнять все индивидуальные времена t_k одному и тому же макроскопическому времени t галилеева наблюдателя, показываемому его часами. Это эквивалентно рассмотрению в пространстве-времени плоских сечений со значениями времени $t = \text{const}$ для данного наблюдателя (расслоение пространства-времени гиперплоскостями). Таким путем мы снова приходим ко всем сделанным ранее выводам об особой роли переменной t , т.е. макроскопического времени наблюдателя, которое в отличие от пространственных координат x_k, y_k, z_k частицы не обладает статистическим распределением.

В работах последних лет Томонаги, Швингера и других исследователей был предложен иной подход (важное значение которого подчеркивал и Коста де Боргар), позволяющий придать явно ковариантный вид уравнениям квантовой теории поля. Он состоит в том, что после приписывания каждой частице

индивидуального времени t_k все пространство-время расслаивается не параллельными гиперплоскостями, соответствующими постоянным значениям наблюдаемого галилеева времени, а семейством *пространственноподобных* гиперповерхностей; точки таких трехмерных гиперповерхностей можно характеризовать тремя криволинейными пространственноподобными координатами u, v, w , и можно ввести четвертую, времениподобную переменную τ , отсчитываемую по нормали к гиперповерхностям, так что для каждой гиперповерхности семейства имеем $\tau = \text{const}$. Случай гиперплоскостей $t = \text{const}$, рассмотренный выше, будет, очевидно, частным случаем гиперповерхностей. После того как пространство-время подобным образом расслоено, можно в уравнениях для системы частиц все t_k приравнять одному и тому же значению τ , т.е. сгруппировать все события x_k, y_k, z_k, t_k , расположенные на одной и той же поверхности $\tau = \text{const}$. В результате приходим к обобщению обычной многовременной теории, называемому супермноговременной теорией. Такой подход дает некоторые преимущества при изучении вопросов, связанных с релятивистской ковариантностью. Коста де Боргар предложил на основе подобного расслоения пространства-времени пространственноподобными гиперповерхностями S представить характеристическую функцию Арнуса в виде

$$F_A(s) = \int_D \psi^* e^{isA} \psi d\sigma,$$

где интеграл берется по поверхности S . Результатом оказывается теория, в некоторых отношениях более стройная и более общая, чем та, которая была изложена в предыдущем разделе. Но она, по-видимому, тоже не дает возможности устранить различие между пространственными и временной переменными, ибо такое различие, существующее в частном случае, когда гиперповерхностями S служат гиперплоскости, не может исчезнуть в общем случае, охватывающем данный частный случай. Впрочем, и из замечаний, сделанных в самой работе Коста де Боргара, следует, что времениподобная переменная τ по своей роли существенно отличается от пространственноподобных переменных u, v, w . Таким образом, мне представляется невозможным устранить особую роль, которую в квантовой теории играет времениподобная переменная.

Литература

1. *Einstein Albert, Born Max*, Correspondance 1916 — 1955, Ed. du Seuil, Paris, 1972, p. 196.
2. *Einstein A.*, Verhandl. Dtsch. Phys. Ges., Bd. 19, 1917, S. 82. [Имеется перевод: Эйнштейн А. Собрание научных трудов. — М.: Наука, 1965, т. III, с. 407.]
3. *Heisenberg W.*, Les principes physiques de la théorie des quanta, dans: Discours de la Méthode, Gauthier-Villars, 1972 (1^{re} éd. 1931).
4. *Heisenberg W.*, Physique et philosophie, dans: Science d'Aujourd'hui, Albin-Michel, Paris, 1961.
5. *Bohr N.*, La physique atomique et la connaissance humaine, Gonthier, Genève, 1961. [Имеется перевод: Бор Н. Атомная физика и человеческое познание. — М.: ИЛ, 1961.]
6. *Heisenberg W.*, dans: Louis de Broglie — physicien et penseur, Albin-Michel, Paris, 1953.
7. *Arzelès H.*, La thermodynamique relativiste et quantique, Gauthier-Villars, 1968.
8. *Brillouin L.*, Relativity reexamined, Academic Press, 1971.
9. *Souriau J. M.*, La structure des systèmes dynamiques, Dunod, Paris, 1970.
10. *Goldstein H.*, Classical mechanics, Addison-Wesley, Cambridge, Mass., 1953. [Имеется перевод: Голдштейн Г. Классическая механика. — М.: Гостехиздат, 1957.]
11. *Davisson C. J., Germer L. H.*, Phys. Rev., **30**, 705 (1927).
12. *Thomson G. P.*, Nature, **120**, 802 (1927).
13. *Rupp E.*, Naturwiss., **16**, 556 (1929).
14. *Ponte M.*, Comptes Rend., **188**, 909 (1929).
15. *Boersch H.*, Naturwiss., **28**, 709 (1940).
16. *Lenz R.*, Ann. de physique, **20**, 91 (1946).
17. *Darwin C.G.*, Proc. Roy. Soc., **130**, 632 (1931).
18. *Landau L., Peierls R.*, Zs. Phys., **69**, 56 (1931). [Имеется перевод: в кн.: Ландау Л. Д. Собрание трудов. — М.: Наука, 1969, т. I, с. 56.]
19. *Schrödinger E.*, Zs. Phys., **78**, 309 (1932).
20. *Schrödinger E.*, Annales di l'I.N.P., **2**, 287 (1932).
21. *Мандельштам Л. И., Тамм И. Е.* — Изв. АН СССР, сер. физ., 1945, т. 9, с. 122; Journ. Phys., **9**, 249 (1945).
22. *Einstein A., Podolsky B., Rosen N.*, Phys. Rev., **47**, 777 (1935). [Имеется перевод: Эйнштейн А., Подольский Б., Розен Н. — УФН, 1936, т. 16, с. 440.]
23. *Schrödinger E.*, Naturwiss., **23**, 823, 844, 887 (1935).
24. *Bohr N.*, Phys. Rev., **48**, 696 (1935). [Имеется перевод: Бор Н. Избранные научные труды — М.: Наука, 1971, т. II, с. 180.]

25. *Furry W. H.* Phys. Rev., **49**, 393 (1936).
26. *Bohm D.*, Quantum theory, Prentice-Hall, London, 1951. [Имеется перевод: *Бом Д.* Квантовая теория. — М.: Наука, 1965.]
27. *Estermann I., Stern O.*, Zs. Phys., **61**, 95 (1930).
28. *Faget J.*, Revue d'Optique, **40**, 347 (1961).
29. *Jönsson C.*, Zs. Phys., **161**, 454 (1961).
30. Fifty Years of Electron Diffraction, eds. P. Goodman, D. Reidel, Dordrecht-Boston, 1981.
31. *Taylor G. J.*, Proc. Cambr. Phill. Soc., **15**, 2 (1908).
32. *Dempster A. J., Batho H. F.*, Phys. Rev., **30**, 644 (1927).
33. *Биберман Л., Сушкин Н., Фабрикант В.* — ДАН СССР, 1949, т. 66, с. 185.
34. *Arnous E.*, Thèse C.D.U., Paris, 1946; Journ. phys., sér. VIII, **8**, 87 (1947).
35. *Bass J.*, Les equations d'évolution et de transfert en Mécanique aléatoire. Exemples mathématiques. Applications à la Mécanique quantique, Thèse, Paris, 1948.
36. *Wigner E. P.*, Phys. Rev., **40**, 749 (1932).
37. *Fer F.*, dans: Louis de Broglie (sa conception du monde physique), Gauthier-Villars, Paris, 1973.
38. *Bass J.*, Rev. scient., **83**, 3 (1945).
39. *Yvon J.*, Comptes Rend., **223**, 311 (1946); **223**, 347 (1946).
40. *von Neumann J. V.*, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer, Berlin, 1932. [Имеется перевод: *фон Нейман Дж.* Математические основы квантовой механики. — М.: Наука, 1964.]
41. *London F., Bauer E.*, La théorie de l'observation en mécanique quantique, dans: Actualités scientifiques et industrielles, Hermann, Paris, 1939.
42. *Costa de Beauregard O.*, dans: Louis de Broglie — physicien et penseur, Albin-Mishel, Paris, 1953, p. 409.
43. *Costa de Beauregard O.*, Comptes Rend., **236**, 277 (1953), **236**, 1632 (1953).

Научные труды Луи де Бройля

I. ЖУРНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

1. О вычислении граничных частот K - и L -полос поглощения тяжелых элементов. *Comptes Rend.*, **170**, 585 (1920).
2. О поглощении X -лучей веществом. *Comptes Rend.*, **171**, 1137 (1920).
3. О модели атома Бора и о корпускулярных спектрах. *Comptes Rend.*, **172**, 746 (1921). [Совместно с М. де Бройлем.]
4. О структуре электронных оболочек тяжелых атомов. *Comptes Rend.*, **172**, 1650 (1921). [Совместно с А. Довилье.]
5. О распределении электронов в тяжелых атомах. *Comptes Rend.*, **173**, 137 (1921). [Совместно с А. Довилье.]
6. О корпускулярном спектре элементов. *Comptes Rend.*, **173**, 527 (1921). [Совместно с М. де Бройлем.]
7. Об уменьшении частоты кванта в последовательных переходах с испусканием высокочастотного излучения. *Comptes Rend.*, **173**, 1160 (1921).
8. О теории поглощения X -лучей веществом и о принципе соответствия. *Comptes Rend.*, **173**, 1456 (1921).
9. X -лучи и термодинамическое равновесие. *Journ. phys.*, sér. VI, **3**, 33 (1922).
10. О спектре лучей Рентгена. *Comptes Rend.*, **175**, 685 (1922). [Совместно с А. Довилье.]
11. Об аналогиях в структуре оптических серий и серий Рентгена. *Comptes Rend.*, **175**, 755 (1922). [Совместно с А. Довилье.]
12. Излучение абсолютно черного тела и кванты света. *Journ. phys.*, sér. VI, **3**, 422 (1922).
13. Об интерференции и о теории квантов света. *Comptes Rend.*, **175**, 811 (1922).
14. Замечания о корпускулярных спектрах и о фотоэффекте. *Comptes Rend.*, **175**, 1139 (1922). [Совместно с М. де Бройлем.]
15. Замечания о работе Е. Хжалмара, посвященной серии М элементов. *Comptes Rend.*, **175**, 1198 (1922). [Совместно с А. Довилье.]
16. Волны и кванты. *Comptes Rend.*, **177**, 517 (1923).
17. Кванты света. Дифракция и интерференция. *Comptes Rend.*, **177**, 548 (1923).
18. Кванты, кинетическая теория газов и принцип Ферма. *Comptes Rend.*, **177**, 630 (1923).
19. О спектре X -лучей и о структуре атома. *Journ. phys.*, sér. VI, **V**, 119 (1924). [Совместно с А. Довилье.]
20. Об экспериментальной проверке предсказаний теории Комптона и Дебая о вылете электронов при рассеянии X -лучей. *Comptes Rend.*, **178**, 383 (1924). [Совместно с М. де Бройлем.]

21. Попытка построения теории легких квантов. *Phil. Mag.*, **47**, 446 (1924).
22. Об общем определении понятия соответствия между волной и траекторией частицы. *Comptes Rend.*, **179**, 39 (1924).
23. О теореме Бора. *Comptes Rend.*, **179**, 676 (1924).
24. О динамике квантов света и об интерференции. *Comptes Rend.*, **179**, 1039 (1924).
25. О собственной частоте электрона. *Comptes Rend.*, **180**, 498 (1925).
26. О физической интерпретации X-спектров жирных кислот. *Comptes Rend.*, **180**, 1485 (1925). [Совместно с Ж.-Ж. Трийя.]
27. Об аналогии между динамикой материальной точки и геометрической оптикой. *Journ. phys.*, sér. V., **7**, 1 (1926).
28. Замечания о новой волновой механике. *Comptes Rend.*, **183**, 272 (1926).
29. Принципы новой волновой механики. *Journ. phys.*, sér. VI, **7**, No 11, 321 (1926).
30. О возможности увязывания явлений дифракции и интерференции с теорией квантов света. *Comptes Rend.*, **183**, 447 (1926).
31. О возможности согласования электромагнитной теории с новой волновой механикой. *Comptes Rend.*, **184**, 81 (1927).
32. Корпускулярная структура вещества и излучения и волновая механика. *Comptes Rend.*, **184**, 273 (1927).
33. Пятимерная вселенная и волновая механика. *Journ. phys.*, sér. VI, **8**, № 2, 65 (1927).
34. Волновая механика и корпускулярная структура вещества и излучения. *Journ. phys.*, sér. VI, **8**, № 5, 225 (1927).
35. О роли непрерывных волн в волновой механике. *Comptes Rend.*, **185**, 380 (1927).
36. О новой динамике квантов. Доклад на 5-м Сольвеевском конгрессе по физике. Dans: *Electrons et Photons, rapports et discussions du V^e Conseil de Physique Solvay*, Gauthier-Villars, Paris, 1922, p. 105.
37. Частица и волны ψ . *Comptes Rend.*, **185**, 1180 (1927).
38. Об уравнениях и общих принципах волновой механики. *Bull. Soc. math. France*, mai 1930.
39. Замечания об интегралах движения в волновой механике. *Comptes Rend.*, **194**, 693 (1932).
40. О плотности средних значений в теории Дирака. *Comptes Rend.*, **194**, 1062 (1932).
41. Об аналогии между электроном Дирака и электромагнитной волной. *Comptes Rend.*, **195**, 536 (1932).
42. Замечания о механическом и магнитном моментах электрона. *Comptes Rend.*, **195**, 577 (1932).
43. Об электромагнитном поле световой волны. *Comptes Rend.*, **195**, 862 (1932).
44. О плотности энергии в теории света. *Comptes Rend.*, **197**, 1377 (1933).
45. О природе фотона. *Comptes Rend.*, **198**, 135 (1934).
46. Некоторые замечания о теории магнитного электрона Дирака. Dans: *Arch. Sci. phys. natur.*, 5^e pér., vol. 15, 1933, p. 465.
47. Замечания о теории света. Dans: *Mém. Acad. roy. Sci. de Liège*, 3^e sér., vol. 19, 1934.
48. Волновое уравнение фотона. *Comptes Rend.*, **199**, 445 (1934).
49. О спине фотона. *Comptes Rend.*, **199**, 813 (1934). [Совместно с Ж. Винтером.]
50. О выражении для плотности в новой теории фотонов. *Comptes Rend.*, **199**, 1165 (1934).
51. Замечание о взаимодействии между веществом и электромагнитным полем. *Comptes Rend.*, **200**, 361 (1935).
52. О теореме Кенига в волновой механике. *Comptes Rend.*, **201**, 369 (1935). [Совместно с Ж.-Л. Детуш.]
53. Релятивистский закон преобразования углового момента вращающегося тела. *Journ. math. pures appl.*, **15**, 89 (1936).

54. Теория фотона и релятивистская волновая механика систем. *Comptes Rend.*, **203**, 473 (1936).
55. Новейшие теоретические представления о свете. *Daps: Ann. Soc. scient. Bruxelles*, 1^{re} sér., vol. 157, 1937, p. 99.
56. Квантование полей в теории фотона. *Comptes Rend.*, **205**, 345 (1937).
57. Об одном случае приводимости в волновой механике частиц со спином 1. *Comptes Rend.*, **208**, 1697 (1939).
58. О частицах с произвольным спином. *Comptes Rend.*, **209**, 265 (1939).
59. Действительные и комплексные поля в квантовой теории электромагнитного излучения. *Comptes Rend.*, **211**, 41 (1940).
60. Об интерпретации некоторых уравнений в теории частиц со спином 2. *Comptes Rend.*, **212**, 657 (1941).
61. О распространении энергии света в анизотропных средах. *Comptes Rend.*, **215**, 153 (1942).
62. О представлении электромагнитных величин в квантовой теории поля и волновой механике фотона. *Comptes Rend.*, **217**, 89 (1943).
63. Введение постоянных Кулона и Ньютона в волновую механику. *Comptes Rend.*, **218**, 373 (1944). [Совместно с М.-А. Тоннела.]
64. Замечания по поводу некоторых трудностей в теории фотона, связанных с использованием решения для аннигиляции. *Comptes Rend.*, **218**, 889 (1944). [Совместно с М.-А. Тоннела.]
65. Об эффекте, ограничивающем возможности корпускулярного микроскопа. *Comptes Rend.*, **222**, 1017 (1946).
66. Замечания о формуле Больцмана для периодических систем. *Comptes Rend.*, **223**, 298 (1946).
67. Об изучении очень мелких структур при помощи корпускулярного микроскопа. *Comptes Rend.*, **223**, 490 (1946).
68. О применении теоремы о вероятностях сложных событий в волновой механике. *Comptes Rend.*, **223**, 874 (1946).
69. Об электрине Тибо и о возможном существовании очень малого заряда у нейтрона. *Comptes Rend.*, **224**, 615 (1947).
70. Когерентное рассеяние и корпускулярный микроскоп. *Comptes Rend.*, **224**, 1743 (1947).
71. Принцип инерционности энергии и понятие потенциальной энергии. *Comptes Rend.*, **225**, 163 (1947).
72. О частоте и фазовой скорости плоских монохроматических волн в волновой механике. *Comptes Rend.*, **225**, 361 (1947).
73. О релятивистском законе преобразования температуры. *Cahiers de phys.*, janv. 1948, p. 1.
74. О статистике чистых состояний в волновой механике. *Comptes Rend.*, **226**, 1056 (1948).
- 74а. Статистика чистых состояний в волновой механике и интерференция вероятностей. *Rev. scient.*, **87**, 259 (1948).
75. О возможности наблюдения собственного магнитного момента частиц со спином. *Comptes Rend.*, **226**, 1765 (1948).
76. О возможности наблюдения собственного магнитного момента частиц со спином 1/2. *Journ. phys.*, sér. VIII, **9**, 265 (1948).
77. О классическом вычислении энергии и импульса электрона чисто электромагнитной природы. *Comptes Rend.*, **228**, 1265 (1949).
78. Свободная энергия и функция Лагранжа. Приложение к электродинамике и к взаимодействию токов с постоянными магнитами. *Portugaliæ Physica*, **III**, 1 (1949).

79. Проникновение электромагнитной волны в среду с диэлектрической проницаемостью, изменяющейся по линейному закону. Note préliminaire du Laboratoire national de radioélectricité, No 129 (1949).
80. О новой форме взаимодействия между электрическими зарядами и электромагнитным полем. Comptes Rend., **229**, 157 (1949).
81. Новые замечания о взаимодействии между электрическим зарядом и электромагнитным полем. Comptes Rend., **229**, 269 (1949).
82. О теории поля с вычитанием. Comptes Rend., **229**, 401 (1949).
83. О полях, создаваемых протоном и нейтроном. Comptes Rend., **229**, 640 (1949).
84. Новое понимание взаимодействия между электрическими зарядами и электромагнитным полем. Portugaliae Mathematica, **8**, 37 (1949).
85. О мезонных полях, связанных с электроном в новой теории поля с вычитанием. Comptes Rend., **230**, 1009 (1950). [Совместно с Р. Рело.]
86. О возможности существования сложной структуры у частиц со спином 1. Comptes Rend., **230**, 1329 (1950). [Совместно с М.-А. Тоннела.]
87. Дополнительные замечания о сложной структуре частиц со спином 1. Comptes Rend., **230**, 1434 (1950).
88. О сходимости интегралов в задаче о поляризации вакуума. Comptes Rend., **230**, 2061 (1950).
89. О новой форме теории поля с вычитанием. Journ. phys., **11**, 481 (1950).
90. Лагранжева схема теории поля с вычитанием. Comptes Rend., **232**, 1269 (1951).
91. О возможности существования сложной структуры у частиц со спином 1. Journ. phys., **12**, 509 (1951).
92. Некоторые замечания о калибровочных преобразованиях и об определении тензора Герца в теории максвелловских частиц со спином 1. Comptes Rend., **232**, 2056 (1951). [Совместно с Б. Квалем.]
93. Замечания о теории волны-пилота. Comptes Rend., **233**, 641 (1951).
94. О тензоре энергии-импульса в теории поля с вычитанием. Comptes Rend., **234**, 20 (1952).
95. О возможности причинной и объективной интерпретации волновой механики. Comptes Rend., **234**, 265 (1952).
96. О соотношениях между величинами заряда и массы в теории поля с вычитанием. Comptes Rend., **234**, 1505 (1952).
97. О введении понятий волны-пилота и двойного решения в теорию электрона Дирака. Comptes Rend., **235**, 557 (1952).
98. Об интерпретации волновой механики систем частиц в конфигурационном пространстве с точки зрения теории двойного решения. Comptes Rend., **235**, 1345 (1952).
99. Волновая механика систем одинаковых частиц и теория двойного решения. Comptes Rend., **235**, 1453 (1952).
100. Об интерпретации волновой механики на основе представления о сингулярных волнах. Comptes Rend., **236**, 1459 (1953).
101. О причинной интерпретации нелинейной волновой механики. Comptes Rend., **237**, 441 (1953).
102. Представления классической механики как база для волновой механики систем в теории двойного решения. Comptes Rend., **239**, 521 (1954).
103. Обоснование волновой механики систем в конфигурационном пространстве с точки зрения теории двойного решения. Comptes Rend., **239**, 565 (1954).
104. Новый вывод формулы ведёния в теории двойного решения. Comptes Rend., **239**, 737 (1954).
105. Регулярные волны и волны с сингулярностью в волновой механике. Comptes Rend., **241**, 345 (1955).

106. Иллюстрация на одном примере формы сингулярной волновой функции в теории двойного решения. *Comptes Rend.*, **243**, 617 (1956).
107. Роль величины $|\psi|^2$ для стационарных состояний в причинной интерпретации волновой механики. *Comptes Rend.*, **243**, 689 (1956).
108. Новые идеи о системах частиц в причинной интерпретации волновой механики. *Comptes Rend.*, **244**, 529 (1957). [Совместно с Ж. Л. Андраде э Сильвой.]
109. Попытка достижения согласованности между уравнением Гейзенберга и уравнением для волны и в теории двойного решения. *Comptes Rend.*, **246**, 2077 (1958).
110. О именованности частиц. *Comptes Rend.*, **247**, 1069 (1958).
111. Два замечания в связи с задачей о вращающемся диске в общей теории относительности. *Comptes Rend.*, **249**, 1426 (1959).
112. Классические задачи и билакальное представление ротатора Накао. *Comptes Rend.*, **249**, 2255 (1959). [Совместно с П. Ийоном и Ж.-П. Вижье.]
113. Интерпретация волновой механики. *Journ. phys.*, **20**, 963 (1959).
114. Термодинамика изолированной частицы. *Comptes Rend.*, **253**, 1078 (1961).
115. Новое представление термодинамики изолированной частицы. *Comptes Rend.*, **255**, 87 (1962).
116. Некоторые следствия из термодинамики изолированной частицы. *Comptes Rend.*, **255**, 1052 (1962).
117. Замечания об интерпретации дуальности воли и частиц. *Cahiers physique*, No 147, 425 (1962).
118. Применение теории слияния к новой модели протяженных элементарных частиц. *Comptes Rend.*, **256**, 3390 (1963). [Совместно с Ж.-П. Вижье.]
119. Таблица элементарных частиц, соответствующих новой модели элементарных частиц. *Comptes Rend.*, **256**, 3551 (1963). [Совместно с Ж.-П. Вижье.]
120. О введении свободной энергии в скрытую термодинамику частиц. *Comptes Rend.*, **257**, 1430 (1963).
121. О кинетических центрах в термодинамике изолированной частицы. *Comptes Rend.*, **257**, 1822 (1963).
122. Электромагнитные волны и фотоны. *Comptes Rend.*, **258**, 6345 (1964).
123. Об одном вопросе теории лазеров. Сообщение Лиссабонской Академии наук, 21 ноября 1963 г.
124. Скрытая термодинамика частиц. *Ann. Inst. H. Poincaré*, **1**, No 1, 1 (1964).
125. О соотношении неопределенностей $\delta n \delta \varphi \geq 2\pi$. *Comptes Rend.*, **240**, 6041 (1965).
126. О релятивистском преобразовании тепла и температуры и о скрытой термодинамике частицы. *Comptes Rend.*, **262**, 1235 (1966).
127. О смещении спектральных линий удаленного астрономического объекта. *Comptes Rend.*, **263B**, 589 (1966).
128. Об интерпретации оператора Гамильтона $H_{\text{опер}}$ и оператора «квадрата углового момента» $M_{\text{опер}}^2$ в квантовой механике. *Comptes Rend.*, **263A**, 645 (1966). [Совместно с Ж. Л. Андраде э Сильвой.]
129. О формуле $Q = Q_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ и об основаниях волновой механики. *Comptes Rend.*, **264B**, 1041 (1967).
130. Броуновское движение частицы в своей воле. *Comptes Rend.*, **264B**, 1041 (1967).
131. О динамике тел с переменной собственной массой и о релятивистской формуле преобразования тепла. *Comptes Rend.*, **264B**, 1173 (1967).
132. Динамика ведения в среде с преломлением и дисперсией и теория аитчастиц. *Journ. phys.*, **28**, 481 (1967).
133. Об уравнении $\Delta W = \Delta Q + \Delta \mathcal{L}$ и о релятивистской термодинамике. *Comptes Rend.*, **265B**, 437 (1967).

134. О дискуссии по поводу формулы $Q=Q_0\sqrt{1-\beta^2}$ и об определении давления в релятивистской термодинамике. *Comptes Rend.*, **265В**, 889 (1967).
135. О применении волновой механики к теории волноводов. *Comptes Rend.*, **266В**, 1233 (1968).
136. Релятивистская термодинамика и скрытая термодинамика частиц. *Intern. Journ. Theor. Phys.*, 1, No 1, 1 (1968).
137. Релятивистская термодинамика и волновая механика. *Ann. Inst. H. Poincaré*, № 2, 89 (1968).
138. Интерпретация проведенного недавно эксперимента по интерференции фотонных пучков. *Phys. Rev.*, **172**, 1284 (1968).
139. Об интерпретации соотношений неопределенностей. *Comptes Rend.*, **268В**, 277 (1969).
140. О соударении частиц в волновой механике. *Comptes Rend.*, **268В**, 1449 (1969). [Совместно с Ж. Л. Андраде э Сильвой.]
141. О новом представлении формул волновой механики. *Comptes Rend.*, **271В**, 559 (1970).
142. Спины и угловые моменты. *Comptes Rend.*, **272В**, 349 (1971).
143. К задаче о движении частицы в преломляющей среде. *Comptes Rend.*, **272В**, 1333 (1971).
144. Масса фотона. Эффект Эмбера и Гооса — Хенхена в падающем поляризованном пучке света. *Comptes Rend.*, **273В**, 1069 (1972). [Совместно с Ж.-П. Вижье.]
145. О распределении потенциалов взаимодействия между частицами системы. *Comptes Rend.*, **275В**, 899 (1972).
146. Об истинных основаниях волновой механики. *Comptes Rend.*, **277В**, 71 (1973).
147. Об опровержении теоремы Белла. *Comptes Rend.*, **278В**, 721 (1974).
148. Адиабатическая инвариантность и скрытая термодинамика частиц. *Fond. de Broglie*, 1, No 1, 1 (1976).

II. МОНОГРАФИИ И СБОРНИКИ СТАТЕЙ

1. Исследования по теории квантов. Докторская диссертация, защищенная в Париже 25 ноября 1924 г. *Ann. de phys.* 10^e sér., 3, 22 (1925).
2. Волны и траектории частиц. Dans: *Collection de Physique mathématique*, fascicule I, Gauthier-Villars, Paris, 1926.
3. Введение в физику лучей X и γ , Париж, 1928. [Совместно с М. де Бройлем.]
4. Волновая механика. Dans: *Mémorial des Sciences physiques*, fascicule I, Gauthier-Villars, Paris, 1928.
5. Избранные работы по волновой механике, Глазго, 1928. [Совместно с Л. Бриллюэном.]
6. Волны и частицы, Париж, 1930.
7. Введение в волновую механику, Париж, 1930. [Имеется перевод: де Бройль Л. Введение в волновую механику. — Харьков — Киев: Гос. НТИ Украины, ОНТИ, НКТП, 1934.]
8. Теория квантования в новой механике, Париж, 1932.
9. Об одной более ограничительной форме соотношений неопределенностей, Париж, 1932.
10. Прохождение наэлектризованных частиц через потенциальные барьеры. *Ann. Inst. H. Poincaré*, III, 339 (1932—1933).
11. Магнитный электрон (теория Дирака), Париж, 1934. [Имеется перевод: де Бройль Л.

- Магнитный электрон (теория Дирака). — Харьков: ОНТИ—ДНТВУ—НКТП, 1936.]
12. Новая концепция света, Париж, 1934.
 13. Новые исследования света, Париж, 1936.
 14. Принцип соответствия и взаимодействие между излучением и веществом. Dans: Collection des Exposés de physique théorique, Hermann, Paris, 1938, p. 704.
 15. Волновая механика систем частиц. Dans: Physique mathématique, fas. V, Gauthier-Villars, Paris, 1939.
 16. Новая теория света. Волновая механика фотона. Hermann, Paris. Т. 1: Свет в вакууме, 1940. Т. 2: Взаимодействие фотонов с веществом, 1942.
 17. Проблемы направленного распространения электромагнитных волн, Париж, 1941.
 18. Общая теория частиц со спином, Париж, 1943.
 19. От волновой механики до теории ядра, Hermann, Paris. Т. 1: 1943; Т. 2: 1945; Т. 3: 1946.
 20. Частицы, волны и волновая механика. Dans: Conférences à l'École supérieure d'Electricité. Centre de documentation universitaire, Paris, 1943; dans: Sciences d'aujourd'hui, Albin-Michel, Paris, 1945.
 21. Волновая механика фотона и квантовая теория поля, Париж, 1949.
 22. Корпускулярная и волновая оптика, Париж, 1950.
 23. Теория частиц со спином $1/2$ (электроны Дирака), Париж, 1951.
 24. Элементы теории квантов и волновой механики, Париж, 1953.
 25. Останется ли квантовая физика индетерминистской? Париж, 1953. [Совместно с Ж.-П. Вижье.]
 26. Попытка причинной и нелинейной интерпретации волновой механики: теория двойного решения, Париж, 1956.
 27. Теория измерений в волновой механике (обычная интерпретация и причинная интерпретация), Париж, 1957.
 28. Новая теория частиц, предложенная Ж.-П. Вижье и его сотрудниками, Париж, 1961.
 29. Критический анализ основ принятой в настоящее время интерпретации волновой механики, Париж, 1963.
 30. Термодинамика изолированной частицы (скрытая термодинамика частиц), Париж, 1964.
 31. Электромагнитные волны и фотоны, Париж, 1968.
 32. Реинтерпретация волновой механики. 1-я часть: Общие принципы, Париж, 1971.
 33. Вехи для новой микрофизики, Париж, 1978.

III. РАБОТЫ ПО ФИЛОСОФИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

1. Новая физика и кванты, Париж, 1937. [Имеется перевод: *де Бройль Л.* Революция в физике (новая физика, кванты). — М.: Атомиздат, 1965.]
2. Вещество и свет, Париж, 1937.
3. Прерывность и непрерывность в современной физике, Париж, 1941.
4. Физика и микрофизика, Париж, 1947.
5. Ученые и открытия, Париж, 1951.
6. Новые перспективы в микрофизике, Париж, 1956.
7. По тропам науки, Париж, 1960. [Имеется перевод: *де Бройль Л.* По тропам науки. — М.: ИЛ, 1965.]
8. Определенности и неопределенности в науке, Париж, 1966.
9. Исследования в течение полувек, Париж, 1976.

IV. РЕЧИ И ВЫСТУПЛЕНИЯ В АКАДЕМИИ НАУК

1. Жизнь и творчество Эмиля Пикарда. Выступление на общем собрании 21 декабря 1942 г.
2. Жизнь и творчество Андре Блонделя. Выступление на общем собрании 18 декабря 1944 г.
3. Речь на приеме в Академии наук Франции, произнесенная 31 мая 1945 г.
4. Реальность молекул и творчество Жана Перрэнна. Выступление на общем собрании 17 декабря 1945 г.
5. Слово о цене доблести. Выступление на общем собрании 10 января 1946 г.
6. Жизнь и творчество Шарля Фабри. Выступление на общем собрании 16 декабря 1946 г.
7. Жизнь и творчество Поля Ланжевена. Выступление на общем собрании 15 декабря 1947 г.
8. Современная физика и творчество Альберта Эйнштейна. Выступление на общем собрании 19 декабря 1949 г.
9. Жизнь и творчество Хендрика Антона Лорентца. Выступление на общем собрании 10 декабря 1951 г.
10. Жизнь и творчество Эме Коттона. Выступление на общем собрании 14 декабря 1953 г.
11. Дуализм волн и частиц в работах Эйнштейна. Выступление на общем собрании 5 декабря 1955 г.
12. О жизни и творчестве Эмиля Бореля. Выступление на общем собрании 9 декабря 1957 г.
13. О жизни и творчестве Фредерика Жолио-Кюри. Выступление на общем собрании 14 декабря 1960 г.
14. О жизни и творчестве Жоржа Дармуа. Выступление на общем собрании 9 декабря 1962 г.
15. О жизни и творчестве Жана Беккереля. Выступление на общем собрании 9 декабря 1964 г.
16. Жизнь и творчество Камиля Гуттона. Выступление на общем собрании 11 декабря 1965 г.
17. Жизнь и творчество Альберта Перара. Выступление на общем собрании 11 декабря 1967 г.
18. О жизни и творчестве Бернарда Льота. Выступление на общем собрании 8 декабря 1969 г.
19. О жизни и творчестве Андре Данжона. Выступление на общем собрании 13 декабря 1971 г.

V. ВЫСТУПЛЕНИЯ НА КОНФЕРЕНЦИЯХ И РАБОТЫ ПО ОБЩИМ ВОПРОСАМ

1. Теория квантов, синтез динамики и оптики. *Rev. génér. sciences*, **35**, No 22, 629 (1925).
2. Две противоположные концепции света и их возможный синтез. *Scientia*, p. 128 (sept. 1926).
3. Современная физика и научное наследие Френеля. *Rev. métaph. et morale*, **34**, No 4, 421 (1927).
4. Творчество Френеля и эволюция современной физики. *Rev. optique théor. expériment.*, **6**, 493 (1927).
5. Непрерывность и неделимость в современной физике. *Cahier journée*, No 15, p. 60.

6. Недавний кризис волновой оптики. *Rev. scient.*, **67**, No 12, 353 (1929).
7. Детерминизм и причинность в современной физике. *Rev. métaph. et morale*, **37**, No 4, 433 (1929).
8. О волновой природе электрона (лекция, прочитанная в Стокгольме по случаю вручения Нобелевской премии). *Rev. Scient.*, **68**, No 1, 1 (1930).
9. Волны и частицы в современной физике. *Rev. génér. sciences*, **41**, No 4, 101 (1930).
10. Одновременное представление возможностей в новой физике. *Rev. métaph. et morale*, **34**, No 2, 141 (1932).
11. Современное состояние электромагнитной теории. Доклад на Международном конгрессе по электричеству, Париж, 1932.
12. Относительность и кванты. *Rev. métaph. et morale*, **40**, 269 (1929).
13. Некоторые замечания по поводу понятий волны и частицы. *Scientia*, **40**, 177 (1934). [Совместно с М. де Бройлем.]
14. Новые идеи, возникшие на базе квантовой механики. *L'enseign. math.*, **32**, 137 (1932).
15. О представлении событий в новой физике. *Rev. Univ. Bruxelles*, No 3, 277 (1934).
16. Старые пути и новые перспективы в теории света. *Rev. métaph. et morale*, **41**, 445 (1934).
17. Реальность и идеализация. *Rev. synthèse*, **8**, 125 (1934).
18. Прогресс в современной физике. *Rev. française Prague*, No 68, 93 (1935).
19. Взгляд на историю развития оптики. *Thalès*, **1**, 3 (1934).
20. Размышления о двух видах электричества. *Rev. métaph. et morale*, **43**, 173 (1936).
21. Эволюция электрона. *Dans: Livre du Centenaire d'Ampère*, Lyon, 1936.
22. Пример последовательного синтеза в физике: теория света. *Thalès*, **2**, 9 (1935); *Rev. questions scient.*, p. 361 (20 mai 1937).
23. Неделимость и взаимодействие в физическом мире. *Rev. métaph. et morale*, **49**, 353 (1937).
24. Изобретательность в теоретических науках. *Sciences*, **2**, No 14, juin 1937.
25. Современное состояние наших знаний о природе электричества. *Nuovo Cimento*, **14**, No 9 (1937).
26. Физика точек и физика полей. *Rev. métaph. et morale*, **50**, 325 (1938).
27. Квантовая теория излучения. *Rev. métaph. et morale*, **51**, 199 (1939).
28. Последние достижения в теории фотонов и других частиц. *Rev. métaph. et morale*, **52**, 1 (1940).
29. Будущее физики в будущем науки. *Dans: Présences*, Plon, Paris, 1941.
30. Научное творчество Андре Блонделя в общей физике. *Dans: Commémoration de l'oeuvre d'André-Eugène Blondel*, Gauthier-Villars, Paris, 1942.
31. Элементарные частицы вещества и новые теории атомного ядра. *L'Astronomie*, **56**, 1, 27, 51 (1942).
32. Воспоминания о первых шагах волновой механики. *Rev. métaph. et morale*, **53**, 1 (1941).
33. Взлет физики во Франции в период 1815—1825 гг. *Dans: Hier et demain*, No IV, 1943, p. 80.
34. Научные исследования и технические исследования. *Rev. gén. caoutchouc*, **20**, 45 (1943).
35. Понятия современной физики и представления Бергсона о времени и движении. *Rev. métaph. et morale*, **53**, 261 (1941).
36. О понятиях строгих законов и статистических законов. *Rev. econ. contemp.*, **3**, No 25, 1 (1944).
37. Величие науки и ее моральное значение. *N.R.F.*, mars 1945, p.41.
38. Случай и случайность в квантовой физике. *Rev. métaph. et morale*, **60**, 241 (1945).

39. Деятельность Центра теоретической физики в Институте Анри Пуанкаре в течение последних лет. *Experientia*, 11, No 1, (1946).
40. Свет в физическом мире. *Cahiers monde nouv.*, 2, No 3, (1946).
41. Электронный микроскоп и дуальность волн и частиц. *Rev. métaph. et morale*, 57, 1 (1947).
42. Роль математики в развитии современной теоретической физики. Dans: *Les grands courants de la pensée mathématique*, Cahiers du Sud, 1948.
43. О взаимной дополнительности понятий индивидуума и системы. *Dialectica*, 325 (1948).
44. Статистика чистых состояний в волновой механике и интерференция вероятностей. *Rev. scient.*, 87, 259 (1949).
45. Преподавание физики. *Rev. métrologie pratique et légale*, 27, 5 (1949).
46. О соотношении неопределенностей при вторичном квантовании. *Rev. intern. philos.*, No 8, avril 1949.
47. Пространство и время в квантовой физике. *Rev. métaph. et morale*, 58, 119 (1949).
48. Влияет ли будущее на настоящее? *L'orientation médicale*, 16, No 2, 11 (1950).
49. Новый пришелец в физике: ядерное поле. *Rev. métaph. et morale*, 56 117 (1951).
50. Философское и практическое значение кибернетики. Лекция, прочитанная в Консерватории искусств и ремесел 5 октября 1951 г.
51. Останется ли квантовая физика индетерминистской? *Rev. d'histoire des sciences*, 5, 289 (1952).
52. Частицы в микрофизике. Лекция, прочитанная во Дворце открытий 20 декабря 1952 г.
53. Возможна ли новая интерпретация волновой механики? *Nuovo Cimento*, 1. 37. 50, 1^{er} janvier 1955.
54. Свет, кванты и осветительная техника. Лекция, прочитанная во Дворце открытий 16 января 1960 г.
55. Существование волн и фотонов в электромагнитном излучении и теория двойного решения. *Energie nucl.*, 7, No 3, mai 1965.
56. Реинтерпретация волновой механики. *Physics Bull.*, 19, 133 (1968).
57. Некоторые замечания о развитии теоретической физики. *La Nuova Italia (Florence)*, 217 (1968).
58. Реинтерпретация волновой механики. *Foundations Phys.*, 1, 5 (1970).
59. Общий взгляд на историю развития и интерпретацию волновой механики. *Rev. franç. electr.*, 43, No 228, 13 (1970).
60. Электромагнитные волны и фотоны в радиотехнике и электротехнике. *Onde électrique*, p. 657 (sept. 1970).
61. Волны и частицы. *Physics Bull.*, 22 (1971).
62. Интерпретация волновой механики на основе теории двойного решения. — in: *Proc. Conf. Varenna Foundations of Quantum Mechanics (1971)*, Academic Press, New York.
63. Речь, произнесенная на первом заседании Общества де Бройля, *Ann. Fond. L. de Broglie*, No special, 1975.
64. Размышления о современной физике. *Ann. Fond. L. de Broglie*, 1, No 2, 49 (1976).
65. Тринадцать замечаний о различных проблемах теоретической физики. *Ann. Fond. L. de Broglie*, 1, No 3, 116 (1976).
66. Размышления о причинности. *Ann. Fond. L. de Broglie*, 2, No 2, 69 (1977).
67. Всякое полное описание реальности требует наличия причинности. *Ann. Fond. L. de Broglie*, 2, No 2, 133 (1977).
68. Необходимость свободы в научном творчестве. *Ann. Fond. L. de Broglie*, 4, No 1, 62 (1979).

Оглавление

Предисловие редактора перевода	5
Вместо предисловия автора. Необходимость свободы научного творчества	8
Предисловие редактора французского издания. Эволюция идей Луи де Бройля относительно интерпретации волновой механики (Ж. Лошак) ...	9
Об истинных идейных основаниях волновой механики (Л. де Бройль)	30

ПЕРВАЯ ЧАСТЬ

(1950—1951)

О СООТНОШЕНИИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ГЕЙЗЕНБЕРГА И О ВЕРОЯТНОСТНОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКИ

<i>Глава I.</i>	ПРИНЦИПЫ ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКИ	34
	1. Классическая динамика материальной точки. Теория Якоби	34
	2. Распространение волн в изотропной среде	38
	3. Переход от классической механики к волновой механике ..	41
	4. Общее уравнение волновой механики для материальной точки	44
	5. Автоматический вывод волнового уравнения	45
<i>Глава II.</i>	ВЕРОЯТНОСТНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКИ	46
	1. Интерпретация волны ψ	46
	2. Принцип интерференции	47
	3. Точная формулировка принципа интерференции. Жидкость вероятности	48
	4. Соотношение неопределенностей Гейзенберга	50
	5. Принцип спектрального разложения (Борн)	52
	6. Новые представления, связанные с изложенными принципами	53
	7. Переход от волновой механики к классической. Теорема Эренфеста, групповая скорость	54
<i>Глава III.</i>	ВОЛНОВАЯ МЕХАНИКА СИСТЕМ ЧАСТИЦ	60
	1. Классическая динамика систем материальных точек	60
	2. Волновая механика для систем частиц	62
	3. Интерпретация волновой механики для систем частиц	64

<i>Глава IV.</i>	ОБЩИЙ ФОРМАЛИЗМ ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКИ	67
	1. Новое представление величин, сопоставляемых с частицей (или системой частиц)	67
	2. Собственные значения и собственные функции линейного эрмитова оператора	69
	3. Непрерывный спектр гамильтониана свободной частицы. δ -функция Дирака	72
<i>Глава V.</i>	ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ВЕРОЯТНОСТНОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКИ	75
	1. Общие идеи	75
	2. Алгебраические матрицы и их свойства	78
	3. Операторы и матрицы в волновой механике	81
	4. Средние значения и дисперсии в волновой механике	83
	5. Интегралы движения в волновой механике	84
	6. Угловой момент в волновой механике	86
<i>Глава VI.</i>	КОММУТИРУЕМОСТЬ КВАНТОМЕХАНИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ	89
	1. Общие теоремы	89
	2. Следствия доказанных теорем	95
	3. Одновременное измерение двух величин в волновой механике	98
	4. Примеры величин, которые не могут быть измерены одновременно. Два вида некоммутируемости	101
<i>Глава VII.</i>	ФИЗИЧЕСКАЯ НЕВОЗМОЖНОСТЬ ОДНОВРЕМЕННОГО ИЗМЕРЕНИЯ КАНОНИЧЕСКИ СОПРЯЖЕННЫХ ВЕЛИЧИН	104
	1. Значение вопроса о невозможности одновременного точного измерения двух канонически сопряженных величин ...	104
	2. Микроскоп Гейзенберга	105
	3. Измерение скорости электрона по эффекту Доплера	107
	4. Прохождение частицы через прямоугольную диафрагму ..	109
	5. Важное замечание об измерении скорости	112
	6. Случай двух наблюдаемых, коммутатор которых есть ненулевой оператор	113
	7. Принцип дополнительности Бора	115
	8. Боровское объяснение опыта Юнга	118
<i>Глава VIII.</i>	ТОЧНАЯ ФОРМА СООТНОШЕНИЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ	122
	1. Теорема о дисперсиях некоммутирующих величин	122
	2. Оптимальность гауссова волнового пакета	128
	3. Сравнение теорем о дисперсиях с качественными соотношениями неопределенностей Гейзенберга (Паули, Робертсон)	131
	4. Различные замечания о неопределенностях. Неопределенности с «резкими границами»	132

Глава IX.	ЧЕТВЕРТОЕ СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ГЕЙЗЕНБЕРГА	141
	1. Отсутствие симметрии между пространством и временем в волновой механике	141
	2. Правильная интерпретация четвертого соотношения неопределенностей	143
	3. Иллюстрация к предложенной интерпретации	144
	4. Замечания о четвертом соотношении неопределенностей ..	146
	5. Метод вариации постоянных и вероятность перехода	149
	6. Вероятности переходов	153
	7. Соотношения неопределенностей и теория относительности	156
	8. Формулы Мандельштама и Тамма	160

Глава X.	НЕКОТОРЫЕ ТРУДНЫЕ ВОПРОСЫ ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКИ	164
	1. Редукция пакета вероятностей в результате измерения	164
	2. Невозможность определения состояния, предшествовавшего измерению, по состоянию после измерения. Размышление фаз в результате измерения	165
	3. Возможность восстановления прошлого по данным измерения в момент t (поствидение)	167
	4. Интерференция вероятностей	169
	5. Некоторые следствия, к которым приводит отсутствие понятия траектории	172
	6. Дискуссии о «коррелированных» системах	177
	7. Дополнения к дискуссии между Эйнштейном и Бором	185

ВТОРАЯ ЧАСТЬ

(1951—1952)

О ВЕРОЯТНОСТНОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКИ И О СВЯЗАННЫХ С ЭТИМ ПРОБЛЕМАХ

Глава XI.	ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	193
	1. Распределение вероятностей в случае одной переменной. Функция распределения	193
	2. Распределение вероятностей двух переменных	199
	3. Очень важное замечание по поводу полученных результатов	208
Глава XII.	ОБЗОР ОСНОВНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКИ	211
	1. Принцип интерференции. Теория волны-пилота	214
Глава XIII.	ВВЕДЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В ВЕРОЯТНОСТНОМ ФОРМАЛИЗМЕ ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКИ	222
	1. Характеристическая функция в случае одной переменной ..	222
	2. Характеристическая функция в случае двух коммутирующих величин	228

	3. Коэффициент корреляции, маргинальные распределения ...	230
	4. Общие теоремы волновой механики и характеристическая функция	233
	5. Случай двух некоммутирующих величин	240
<i>Глава XIV.</i>	ТЕОРИЯ СМЕШАННЫХ СОСТОЯНИЙ И ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ ФОН НЕЙМАНА	264
	1. Чистые и смешанные состояния	264
	2. Статистическая матрица фон Неймана для чистого состояния	267
	3. Статистическая матрица для смешанного состояния	270
	4. Неприводимость чистых состояний	273
	5. Невозможность объяснения законов волновой механики скрытой детерминированностью (фон Нейман)	275
<i>Глава XV.</i>	ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ В ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКЕ	281
	1. Общие соображения	281
	2. Статистика двух взаимодействующих систем	283
	3. Коэффициенты корреляции при взаимодействии между двумя квантовыми системами	286
	4. Измерение физической величины	287
	5. Пример экспериментального измерения физической величины	292
	6. Отдельные замечания по поводу измерения	296
	7. Термодинамический подход фон Неймана	302
	8. Обратимая и необратимая эволюция	305
	9. Статистическая матрица P_0	308
<i>Глава XVI.</i>	РОЛЬ ВРЕМЕНИ В ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКЕ	310
	1. Поствидение в понимании Коста де Боргара [42, 43]. Вероятность результатов измерения	310
	2. Особая роль времени в квантовой механике. Четвертое соотношение неопределенностей	314
	3. Правильная интерпретация четвертого соотношения неопределенностей	317
	4. Четвертое соотношение неопределенностей и теория возмущений	317
	5. Операторы H и $(\hbar/2\pi i)(\partial/\partial t)$	320
	6. Применение метода характеристической функции к операторам, действующим на время	321
	7. Многовременная теория. Криволинейные многообразия в пространстве-времени	323
	ЛИТЕРАТУРА	325
	НАУЧНЫЕ ТРУДЫ ЛУИ ДЕ БРОЙЛЯ	327
	I. Журнальные статьи	327
	II. Монографии и сборники статей	332
	III. Работы по философии естествознания	333
	IV. Речи и выступления в Академии наук	334
	V. Выступления на конференциях и работы по общим вопросам	334